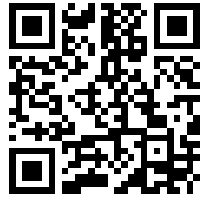
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

CENTRALE V. E. II

BIBLIOTECA NAZIONALE CENTRALE V. E. II
PERIODICI ITALIANI
394
ROMA

Digitized by Google

Pa. it. 394

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO II.

1899

TORINO

CARLO CLAUSEN

LIBRAIO DELLE LL. MM. IL RE E LA REGINA

1899

Digitized by Google

Proprietà letteraria.

Genova. — Tipografia Sordomuti.

Digitized by Google

INDICE

R. Bonola. Bibliografia sui Fondamenti della Geometria Non-Euclidea, p. 1, 33 e 81. (I. Introduzione, pag. 1. — II. Lavori d'indole bibliografica, pag. 2. - III. Indirizzo elementare, pag. 3. - IV. Indirizzo Metrico-Differenziale, pag. 33. — V. Indirizzo Gruppale, pag. 39. — VI. Distanza Finita, pag. 81. — VII. Indirizzo Proiettivo, pag. 83).

G. Vacca. Sui manoscritti inediti di Leibniz, pag. 113. (I. Leibniz aritmetico, pag. 114. - II. La logica matematica in Leibniz, pag. 115. - III. Conclusione, pag. 115).

RECENSIONI ED ANNUNZI

L. Laugel. Oeuvres mathématiques de Riemann, avec une préface de M. Hermite e un discours de M. F. Klein [G. Vailati], pag. 10. — **E. Pascal.** Repertorio di matematiche superiori. I. Analisi [G. L.], pag. 13. — **T. L. Heath.** Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections. Edited in modern notation, with Introductions including an Essay on the earlier History of the subject. — The Works of Archimedes. Edited in modern notation, with Introductory Chapters [G. L.], pag. 13. — **W. Killing.** Einführung in die Grundlagen der Geometrie [G. Fano], pag. 14. — **W. W. Rouse Ball.** Récréation et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes. Troisième édition révue et augmentée par l'Auteur, traduite par J. Fitz-Patrick [G. L.], pag. 21. — **J. C. Poggendorff's.** Biographisch-litterarischer Handwortenbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen Geographen, u. s. w. alles Volker und Zeiten. Dritter Band (die Jahre 1858 bis 1883 umfassend) herausgegeben von Dr. B. W. Feddersen und Prof. D. A. J. von Oettingen [G. L.], pag. 22. — **R. Frieke** und **F. Klein.** Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen. Erster Band: Die gruppentheoretischen Grundlagen [G. Vivanti], pag. 40. — **M. Cantor.** Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Dritte Abtheilung. Die Zeit von 1727 bis 1758 [G. L.], pag. 55. — Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zurich vom 9 bis 11 August 1897 [G. L.], pag. 57. — **H. Andoyer.** Leçons élémentaires sur la théorie des formes et ses applications géométriques, à l'usage des candidats à l'agrégation des sciences mathématiques [G. L.], pag. 58. — **P. Mansion.** Mélanges mathematiques [G. L.], pag. 59. — **C. Neumann.** Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rucksicht auf die elektrischen Wirkungen [P. Pizzetti], pag. 59. — Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben von D. H. Burkhardt und D. W. Franz Meyer. Erster Teil: Reine Mathematik. I. Band: Arithmetik und Algebra. Redigiert von W. F. Meyer. I Heft, 1898; II Heft, 1899 [G. L.], pag. 65. — **A. Capelli.** Lezioni di algebra complementare ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche e matematiche. II ed. con aggiunte [G. L.], pag. 67. — Annuaire pour l'an 1899, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques [G. L.], pag. 68. — **Ch. Méray.** Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques classiques [G. L.], pag. 88. — **G. Vivanti.** Corso di calcolo infinites male [C. M. Piuma], pag. 91. — **J. H. Graf.** Der Mathematiker Jacob Steiner von Utzenstorp. Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen. **J. Lange.** Jacob Steiner's Lebens ahre in Berlin 1821-1863 [G. L.], pag. 93. — **E. Cesàro.** Elementi di calcolo infinitesimale, con numerose applicazioni geometriche [G. Vivanti], pag. 98. — **J. Tannery et J. Molk.** Eléments de la théorie des fonctions elliptiques, T. III. Calcul intégral (I. Partie) [G. L.], pag. 100. — **W. Nernst** und **A. Schönflies.** Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie [P. Pizzetti], pag. 101. — **M. Simon.** Analytische Geometrie des Raumes [G. L.], pag. 101. — **E. Czuber.** Vorlesungen über Differential-und Integral-Rechnung. II Band. [G. Vivanti], pag. 103. — **M. Cantor.** Politische Arithmetik, oder die Arithmetik, des täglichen Lebens [G. L.], pag. 104. — **G. Vivanti.** Teoria dei gruppi di trasformazioni. Lezioni di Analisi superiore fatte nella R. Universita di Messina. Anno sc. 1897-98. Raccolte da D. Apreda [G. L.], pag. 104. — **G. Oltramare.** Calcul de généralisation] G. L.], pag. 105. — **G. Fano.** Lezioni di geometria non euclidea, pag. 105. — **G. Médélec.** Le calcul vectoriel et ses applications en géometrie et en mécanique, pag. 106. — **N. I. Lobatschefskij.**

Digitized by Google

Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen uebersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers, von F. Engel [G. L.], pag. 116. — **F. de Heusch.** Cours d'analyse. — Calcul différentiel [G. Vivanti], pag. 118. — **A. Walter.** Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung [A. Viterbi], pag. 119. — **T. Reve.** Die Geometrie der Lage. Vorträge. Erste Abtheilung [G. L.], pag. 121. — **G. Vailati.** Alcune osservazioni sulle questioni di parole nella storia della scienza e della cultura [G. L.], pag. 122. — **E. Pascal.** Dio Variationsrechnung. Autorisierte deutsche Ausgabe von A. Schepp [G. L.], pag. 123. — **A. Genocchi.** Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, herausgegeben von G. Peano. Autorisierte deutsche Uebersetzung von G. Bohlmann und A. Schepp. Mit einem Vorwort von A. Meyer [G. L.], pag. 123. — **W. W. Beman** and **D. E. Smith.** New plane and solid geometry [G. L.], pag. 124. — **P. Muth.** Theorie und Anwendung des Elementartheiler [G. L.], pag. 125. — **M. d' Ocagne.** Traité de nomographie. Theorie des abaques. Applications pratiques [G. Vivanti], pag. 126. — **E. Duporcq.** Premiers principes de géométrie moderne à l'usage des élèves de mathématiques spécialeset des candidats à la licence et à l'agrégation [G. L.], pag. 127. — **M. Curtze.** Nicolaus Coppernicus. Eine biographische Skizze [G. L.], pag. 128. — **I. Alexandroff.** Problèmes de géométrie élementaire groupés d'apres les methodes à employer pour leur résolutions. Traduit do russe, sur la sixième edition, par D. Aitoff [G. L.], pag. 129. — **G. Vivanti.** Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche tenute nella R. Università di Messina e raccolte dall' assistente Dott. Fulco. Corso dell' anno 1898-99 [G. L.], pag. 129. — **G. Bellacchi.** Lezioni ed esercizi di Algebra complementare [G. L.], pag. 130. — **A. Foschini.** Teorica e pratica dello squadretto calcolatore [G. L.], pag. 130. — **E Pascal.** Repertorio di matematiche superiori II. Geometria [G. L.], pag. 131. — **L. Bianchi.** Teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche [F. G.], pag. 133. — **H. Brocard.** Notes de Bibliographie des Courbes géométriques. Partie complémentaire [G. L.], pag. 133. — **J. Petersen.** Vorlesungen über Functionstheorie [G. Vivanti], pag. 134.

PROGRAMMI E RIASSUNTI

DI CORSI UNIVERSITARI

Università di Roma: Corso di Geometria Analitica e Proiettiva. [Prof. G. Castelnuovo], pag. 29. — Università di Bologna: Corso di Geometria superiore. [Prof. F. Enriques], pag. 76. — Università di Pisa: Corso di Geometria superiore. [Prof. E. Bertini], pag. 106. — Università di Pisa: Corso di Meccanica Razionale. [Prof. G. A. Maggi], pag. 135.

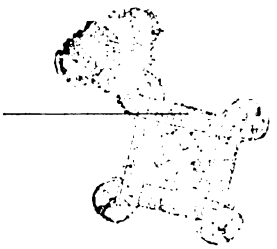
NECROLOGIO

Pietro Riccardi [D. Pantanelli]. Elenco delle pubblicazioni di P. Riccardi, pag. 23. — Sophus Lie [C. Segre]. Elenco delle pubblicazioni di S. Lie [G. L.], pag. 67.

NOTIZIE

I premi dell' Istituto di Francia — Dizionario biografico degli scrittori italiani — Tema di matematica posto a concorso dalla R. Accademia di Madrid — Modelli di matematica — L'enseignement mathématique, pag. 78-80. — Per la teoria dei numeri primi — Tema di matematica proposto dall'Accademia del Belgio — Ristampe — Seconda conferenza internazionale sulla letteratura scientifica — Per favorire le ricerche sul Calcolo geometrico — Concorso bandito dall'Accademia di Tolosa — Due risurrezioni — I figli di C. F. Gauss, pag. 110-112. — Tema proposto dalla Società Jablonowski per l'anno 1902 — Pei collettori di modelli di matematica — I principi fondamentali dell' algebra — The American Mathematical Society — Recenti pubblicazioni matematiche Russe — I classici delle scienze esatte — Un nuovo papiro matematico — Ai cultori della geometria degli iperspazî — Ricerche di G. Bolyai sui numeri immaginari — Giubileo di M. Cantor, pag. 139-144.

Indice dei nomi, pag. 145.



Digitized by Google

GENNAIO, FEBBRAIO E MARZO 1899.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7. 50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*. Università di Genova.

SOMMARIO

R. BONOLA, *Bibliografia sui fondamenti della Geometria in relazione alla geometria Non-Euclidea.*

Recensioni ed annunzi: *Oeuvres mathématiques de* RIEMANN [G. Vailati]. — E. PASCAL. *Repertorio di matematiche superiori*, I [G. L.]. — T. L. HEATH. *Apollonius of Perga. — The Works of Archimedes* [G. L.]. — KILLING. *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* [G. FANO]. — W. W. ROUSE BALL. *Récréations et problèmes mathématiques* [G. L.]. — J. C. POGGENDORFF'S. *Biographisch-litterarischer Handwörtenbuch*, III [G. L.].

Necrologio: *Pietro Riccardi* [D. Pantanelli]. *Elenco delle pubblicazioni di P. Riccardi.*

Programmi e riassunti di corsi universitarii: *Università di Roma. Corso di Geometria analitica e proiettiva* [Prof. G. Castelnuovo].

BIBLIOGRAFIA

sui Fondamenti della Geometria in relazione alla Geometria Non-Euclidea

compilata da ROBERTO BONOLA

INTRODUZIONE.

In questo lavoro bibliografico vengono raccolte le pubblicazioni che si riferiscono ai *Fondamenti della Geometria*, in relazione alle cosi dette *Geometrie non-euclidee*. Ho creduto opportuno classificare queste pubblicazioni secondo i tre indirizzi distinti dal Klein:

1). *Indirizzo elementare* o di Gauss, Lobatscheffscky e Bolyai

2). *Indirizzo metrico* o di Riemann-Helmholtz

3). *Indirizzo proiettivo* o di Cayley-Klein.

La seconda categoria di lavori alla sua volta è stata divisa in due altre, la prima delle quali fu distinta col nome di *indirizzo metrico differenziale* o di Riemann, la seconda col nome *indirizzo gruppale* o di Helmholtz. Ho posto poi in una speciale categoria i pochi lavori appartenenti ad un ultimo indirizzo, che ho denominato *vettoriale*, inaugurato dai lavori del Grassmann.

Digitized by Google

I lavori *storico-critici* e filosofici (dei quali però non ho potuto dare un elenco che si avvicini ad essere completo) sono stati registrati in due gruppi a parte ed un altro gruppo è costituito da pubblicazioni che si riferiscono ad argomenti di Meccanica e di Fisica-Matematica attinenti alla geometria non-euclidea. In fine sotto il nome di *Pubblicazioni varie* si trovano annoverati i pochi lavori, sempre sull'argomento non-euclideo, pei quali non ebbi alcun esatto criterio che mi potesse servire di base alla loro classificazione. Aggiunsi poi in fondo un'elenco speciale che raggruppa le citazioni di quei libri e quei lavori, già classificati nei vari indirizzi, che danno uno svolgimento abbastanza completo dell'argomento.

L'elenco delle pubblicazioni relative ad un dato indirizzo è poi preceduto da un brevissimo cenno, indicante i risultati essenziali che servono a caratterizzare l'indirizzo stesso. Aggiungerò in fine che, nella compilazione della bibliografia, non tenni conto dei numerosissimi scritti che potrebbero assegnarsi al periodo preparatorio della Geometria non-euclidea, i quali si riferiscono, la maggior parte, a tentativi di dimostrazione del postulato d'Euclide ovvero a critiche e confutazioni di tali dimostrazioni. Per essi rimando alla pregevolissima opera di Engel-Stäckel ed alla bibliografia del Prof. Riccardi, citate nel seguito.

Bologna, Gennaio 1899.

LAVORI D'INDOLE BIBLIOGRAFICA

CONSULTATI PER LA COMPILAZIONE DELLA PRESENTE BIBLIOGRAFIA.

ENGEL-STÄCKEL — *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895).

Id. — *Litteratur*, pag. 19-20, 40, 151, 218, 253-254.

Id. — *Verzeichnis von Schriften ueber die Parallelentheorie die bis zum Jare 1837 erschienen sind*, pag. 287 (Vedi Scritti storico-critici.

HALSTED G. B. — *Bibliography of Hyperspace and Non-Euclidean Geometry.* (Am. Journ. I, 1873, II, 1874).

KILLING. W. — *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analyticher Behandlung — Litteraturnachweis* pag. 258-264. (Vedi Killing, indirizzo differenziale).

Id. — *Einführung in die Grundlagen der Geometrie Bd. I* (1393), *Litteratur-Nachweis;* pag. 350-357. *Bd. II* (1898), *Litteratur-Nachweis;* pag. 355-361. (Vedi Killing, indirizzo differenziale).

LORIA G. — *Il Passato ed il Presente delle principali Teorie Geometriche.* (Torino, C. Clausen, 1896).

Digitized by Google

RICCARDI P. — *Saggio di una Bibliografia Euclidea. Parte quarta. Appendice.* (Bologna, Mem. (5), I, 1890).

VACHTCHENKO-ZAKHARTCHENKO. — *Liste des ouvrage qui ont rapport à la geometrie Non-Euclidienne*, (Tolta dagli « *Eléments d'Euclide* » dello stesso autore — vedi indirizzo elementare).

Revue Semestrielle des publications Mathématiques.

Jahrbuch über die Forschritte der Mathematik

INDIRIZZO ELEMENTARE.

A capo della geometria non euclidea e più particolarmente a capo del suo svolgimento elementare stanno il Gauss (1777-1855), il Lobatscheffsky (1793-1856) ed i Bolyai, le cui ricerche ed i cui risultati nascono direttamente dalla critica del postulato sulle parallele e dagli infruttuosi tentativi che, fino da Proclo (410-485), si fecero per la sua dimostrazione.

Il principio su cui basa la trattazione elementare della geometria non-euclidea è la negazione del detto postulato, onde, mantenendo alla retta ed al piano le ordinarie proprietà, ad eccezione di quella che loro attribuisce una estensione infinita (la quale per altro continua implicitamente a comparire in tutti gli scritti non-euclidei precedenti a Riemann), seguono, a seconda dei casi, tre particolari geometrie, caratterizzate ciascuna dal comportamento delle parallele

Il metodo usato in tali ricerche è il sintetico elementare, che, come ultimo risultato, conduce alle formule

$$\operatorname{Cos} h\left(\frac{a}{k}\right) = \operatorname{Cos} h\left(\frac{b}{k}\right) \cdot \operatorname{Cos} h\left(\frac{c}{k}\right)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\operatorname{Cos}\left(\frac{a}{r}\right) = \operatorname{Cos}\left(\frac{b}{r}\right) \cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{c}{r}\right),$$

che esprimono il teorema di Pitagora in ciascuno delle tre geometrie, ed alle formule generali della trigonometria.

In questo stesso gruppo si trovano pure annoverati alcuni altri lavori, che non possono propriamente ascriversi alla geometria non-euclidea, i quali si riferiscono a ricerche, fatte in via elementare, sui principi della geometria ed alla estensione, agli spazi non euclidei, di alcune proposizioni relative allo spazio ordinario.

BALTZER R. — *Ueber die Hypothesen der Parallelentheorie* (Berichte der K. Sachs. Ges. zu Leipzig, XX, 1868).

Id. — *Die Elemente der Mathematik*, (volumi I, II; 1874-75).

Id. — *Ueber die Hypothesen der Parallentheorie* (Crelle, LXXIII, 1871).

Digitized by Google

BATTAGLINI. — *Sulla geometria immaginaria di Lobatchewsky* (Giorn. Mat. V, 1867; Napoli Rend. VI, 1867).

Id. — *Sur la géométrie de Lobatchewsky* (Nouv. Ann. (2) VII, 1868).

BECK C. — *Nouvelle théorie des paralleles* (1858).

BECKER J. — *Die Grundlagen der Geometrie* (Zeit. f. Math. XX, 1875)

Id. — *Elemente der Geometrie auf neuere Grundlage* (Berlin, 1877).

BETTAZZI. — *Il concetto di lunghezza e la retta* (Ann. Mat. (2) XX, 1892).

BOLYAI W. — *Tentamen Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitivo, evidentiaque huic propria, introducendi.* Cum Appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque publico ordinario. Tomus Primus, 1832, Secundus 1833. (Maros-Vàsàrhelyini).

BOLYAI W. — *Kurzer Grundriss eines Versuches:* I. *die Arithmetik, durch zweckmässig construirte Begriffe, von eingebildeten und unendlich-kleinen Grössen gereinigt, anschaulich und logisch-streng darzustellen.* II. *In der Geometrie, die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, der Winkels allgemein, der winkellosen Formen, und der Krummen, der verschiedenen Arten der Gleichheit u. dgl. nicht nur scharf zu bestimmen, sondern auch ihr Sein im Raume zu beweisen: und da die Frage,* ob zwei von der dritten geschnittene Geraden, wenn die Summe der inneren Winkel nicht = 2 R, sich schneiden oder nicht? *niemand auf der Erde ohne ein Axiom (wie Euclid das XI) aufzustellen, beantworten wird; die davon unabhängige Geometrie abzusondern; und eine auf die Ja Antwort, andere auf das Nein so zu bauen, das die Formeln der letztem auf ein Wink auch in der ersten gültig seien. Nach einem lateinischen Werke von 1829. M. Vàsàrhely, und eben daselbst gedruckten ungarischen.* (Maros-Vàsàrhely, 1851).

BOLYAI J. — *Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XII Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta, ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore Johanne Bolyai de Bolya, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.* (Maros-Vàsàrhelyini 1832; Trad. francese di Fr. Schmidt, Paris, Gauthier Villars 1868; Trad. francese di Hoüel, Paris, Hermann, 1895; Trad. italiana di Battaglini, *Gior. Mat.* VI, 1868; Trad. inglese di Halsted, Austin. U. S. A., 1896).

— *Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie* (Vedi Stäckel, scritti storico-critici).

Digitized by Google

BONNEL. — *Note sur la definition des parallèles. Sur la Géometrie imaginaire.* (Mém. Lyon. Acc., 26, S. 4.°, 1889).

BOUNIAKOWSKY V. — *Nouvelle théorie des parallèles.* (Saint-Petersbourg, 1850).

Id. *Lignes parallèles.* (Saint-Petersbourg, 1853).

Id. *Consideration sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la géométrie non-euclidienne.* (Mem. Petersbourg (1) XVII, 1872).

BRODÉN T. — *Om geometriens principer.* (Pedagogiste Tidskrift. Halmstad, 1890).

CASSANI P. — *Geometria rigorosa.* (Venezia, 1872).

Id. *Intorno alle ipotesi fondamentali della geometria.* (Gior. Mat., XI, 1873).

Id. *Nuove proposte intorno ai fondamenti della geometria.* (Gior. Mat., XV, 1877).

Id. *I nuovi fondamenti della geometria.* (Giorn. Mat., XX, 1882).

Id. *Intorno ad alcune generazioni della retta e del piano.* (Atti del R. Istituto Veneto (3), II, 1880).

COLLIGNON R. C. E. — *Essai sur la théorie des parallèles.* (Saint-Petersbourg, Quesneville, 1861).

DE PAOLIS. — *Elementi di geometria.* (Torino, Loescher, 1884).

DIXON E. T. — *The foundations of geometry.* (Cambridge Deighton, Bell and Co., 1890; Nature XLIII).

DODGSON L. — *Curiosa Mathematica.* — Part. I. A New theory of paralleles. (London, Macmillan and Co., 1888; II edizione 1889. Nature XXXIX, 1888; XL, 1889).

DRESSLER H. — *Grundsatz oder Lehrsatz?* (Hoffmann's Zeit., XXV, 1894)

DUCHEMIN P. — *Des parallèles dans l'espace. — Droites et plans parallèles.* (Avranches, 16 S. 8.°, 1888).

Id. *Théorie des parallèles et certitude de la Géométrie.* (Coutances, 16 S. 8.°, 1888).

Id. *Théorie des parallèles sans postulatum et certitude de la Géométrie* (Coutances, 18, S. 12, 1888).

FLEURY H. — *La géométrie affranchie du postulatum d'Euclide.* (Paris, 1869).

FLYE S. MARIE. — *Sur le postulatum d'Euclide.* (Inst. I, sect XXVIII, 1870).

Id. *Étude analitique sur la théorie des parallèles.* (Mondes, (2), XXVI, 1871).

Id. *Étude analitique sur la théorie des parallèles.* (Gauthier Villars, Paris, 1872; Bull. Sc. Math., III, 1872).

FRISCHAUF J. — *Absolute Geometrie, nach J. Bolyai.* (Leipzig, 1872; Bull. Sc. Math., VII).

Digitized by Google

FRISCHAUF J. — *Elemente der absoluten Geometrie.* (Teubner, Leipzig, 1876).

Id. *Erwiederung auf Herrn F. Pietzker Anzeige meiner « Elemente der absoluten Geometrie » in der Jenear Literaturzeitung mit Rücksicht auf die Bemerkungen in dieser Zeitschrift.* (Hoffmann's Zeits., VII, 1879).

GAUSS C. F. — *Lettere di Gauss a Bolyai, Bessel e Schumacher* (Gött Abhandl. XXII, 1887; Gauss' Werken, IV. Vedi Engel Stäckel « Theorie der Parallellinien.... », pag. 209, scritti storico-critici).

Id. *Extrait de la correspondance de Gauss et Schumacher* (Vedi Lobatcheffsky « Études geometriques.... »).

Id. *Mittheilungen aus dem Briefwechsel von Gauss und W. Bolyai* (Vedi Stäckel, scritti storico-critici).

Id. *Gauss, die beiden Bolyai ecc.* (Vedi Id.).

GENOCCHI A. — *Dei principi della meccanica e della geometria in relazione al postulato di Euclide.* (Mem. Soc. XL (3), II, Firenze, 1869).

Id. *Sunto di una memoria di A. Genocchi « intorno ai principi della geometria ».* (Torino, Atti, XII, 1877).

Id. *Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non Euclidiennes.* (Torino, Atti, XII, 1877).

GÉRARD L. — *Sur la géométrie non Euclidienne. — Thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris.* (Gauthiers Villars, Paris, 1892, Jour. de Math. spec. (4), II).

Id. *Sur la géométrie non Euclidienne.* (Nouv. Ann., XII, 1893).

GÜNTER S. — *Sulla possibilità di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche. Complemento alla Geometria assoluta di Bolyai.* (Traduz. dal tedesco di Sparagna, Giorn. Mat. XIV, 1876).

HILBERT. — *Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte.* (Math. Ann. XLVI, 1895).

HOÜEL I. — *Essai d'une exposition rationelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire* (Grunert's Archiv, XL, 1863).

Id. *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie.* (Paris, 1867; second. ediz., 1886).

Id. *Théorie élémentaire des Quantités complexes.* IV *Partie.* (Bordeaux, Mém., V, 1868).

Id. *Note sur l'impossibilité de demontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles, dit Postulatum d'Euclide.* (Nouv. Ann., IX, 1870; Giorn. Mat., VIII, 1870; Bordeaux, Mém., 1870-72).

HUGO M. L. — *Note sur la géométrie panimaginaire de* $\frac{m}{n}$ *dimensions.* (Bull. S. M. F., IV,).

Digitized by Google

KAHAN W. — *Abriss des geometrischen System von Lobatchewsky.* (Spaczinski's Bote. N.° 174, 178, 179, 183, 187-190, 194-196, 198, 199, 210 — 1893-94).

Id. *Abriss des geometrischen System von Lobatchewsky.* (Spaczinski's Bote. N.° 202, 203, 206, 207, 209, 214, 216, 222, 225).

KILLING W. — *Die Rechnung in den Nicht-Euklidischen Raumformen.* (Crelle, LXXXIX, 1880).

Id. *Die Nicht-Euklidischen Raumformen ecc. Erster Abschnitt.* (Vedi Killing, indirizzo differenziale).

Id. *Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Erster Band., Erster Abschnitt.* (Vedi Killing, indirizzo differenziale).

LAURENT M. — *Théorie des parallèles.* (Clermont-Ferrand, Mont-Luis, 1864).

LOBATSCHEFFSKY N. — *Principi della geometria* (in russo). (Corriere di Kasan 1829-30; Opere geometriche, Vol. I).

Id. *Geometria immaginaria* (in russo). (Gelehrten Schriften der Universität Kasan, 1835; Op. geom., Vol. I).

Id. *Nuovi principî della geometria, con una teoria completa delle parallele* (in russo). (Gel. Schrift., 1835-38; Op. geom., Vol. I).

Id. *Applicazioni della geometria immaginaria a qualche integrale* (in russo). (Gel. Schrift., 1836, Op. geom., Vol. I).

Id. *Application de la Geométrie Imaginaire à quelques Integrales.* (Crelle, XVI, 1836).

Id. *Géométrie Imaginaire.* (Crelle, XVII, 1837).

Id. *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.* (Berlin, 1840; seconda ediz. Berlin, 1887; Op. geom., Vol. II).

Id. *Pangéométrie, ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles.* (Kasan, 1855) (Trad. italiana di G. Battaglini — Giorn. Mat., V).

Id. *Études géométriques sur la théorie des parallèles par N. I. Lobatchewsky etc. traduit de l'allemand par J. Hoüel etc. et suivi d'un extrait de la correspondence de Gauss et de Schumacher.* (Mém. de la soc. de Sciences de Bordeaux, IV, 1866; Gauthier Villars, Paris, 1866).

Id. *Études géométriques sur la théorie des parallèles, traduction Hoüel, suivies de: Helmholtz, Sur les faits qui servent de base à la géométrie, trad. Hoüel.* (Hermann, Paris, 1895).

Id. *Opere Geometriche* (in russo). (Kasan, 1883; Trad. Francese, Kasan, 1890; Trad. inglese di G. B. Halsted — Tokio Mat. Ges V, 1892).

Id. *Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie der Verfassers, von* F. ENGEL, (Leipzig, 1899).

Digitized by Google

MANSION P. — *Sur la géometrie non Euclidienne.* (Brux, S. sc., XIII, *A*, 1889).

Id. *Sur le postulatum et les axiomes d'Euclide.* (Brux, S. sc., XIV, *B*, 1890).

Id. *Notes sur la géométrie Euclidienne et sur les géométries non-Euclidiennes.* (Mathésis (2), I, Suppl. I, 1891).

Id. *Sur le principe fondamental de la géométrie de Riemann.* (Mathésis, (2) IV, 1894).

Id. *Essai d'une exposition élementaire des principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann.* (Mathésis, (2), V, Suppl. II, 1895).

Id. *Sur les premiers principes de la métagéométrie et de la géométrie riemannienne.* (Mathésis (2), V, 1895).

Id. *Sur la métagéométrie et ses subdivisions.* (Belgique Bull. (3), XXIX, 1895).

Id. *Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann. Essai d'exposition élémentaire, suivi d'une appendice sur l'histoire et la portée philosophique de la métagéométrie.* (Paris, Gauthier Villars, 1895).

Id. *Premiers principes de la Métagéométrie ou géométrie générale.* (Mathesis (2), 1896; Paris, Gauthier-Villars, 1896).

Id. *Le plan Riemannien est-il identique à la sphère Euclidienne?* (Brux, S. sc., XX, 1896).

Id. *Sur une méthode élémentaire d'exposition des principes de la géométrie non euclidienne.* (Brux, S. sc., XXI, 1897).

Id. *Pour la Géométrie non-Euclidienne, suivi de diverses notes.* (Gand, Ad. Hoste, 1898).

NEWCOMB S. — *Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and uniform positive curvature in the fourth dimension.* (Crelle, LXXXIII, 1877).

PALATINI F. — *Sull'assioma delle parallele, sulla definizione del piano e sull'uguaglianza delle figure.* (Periodico di Mat., IX, 1894).

PEANO. — *I principi di geometria logicamente esposti.* (Torino, 1889).

Id. *Sui fondamenti della geometria.* (Rivista di Matematica, IV, 1894).

PETERSEN J. — *Bemerkungen über den Beweis des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks.* (Math. Ann. XXIX, 1887).

PHILIPPOW M. — *Lobatchewsky's Raum und mehrfach ausgedehnter Raum.* (Wissenschaftl. Revue, N. 15, 19, 22, 24, 25, 27, 28 — 1894).

PIETZKER F. — *Ueber die absolute Geometrie.* (Hoffmann's Zeit., XVIII, 1892).

Digitized by Google

REISHAUS T. — *Zur Parallelenfrage.* (Programm N. 147, Gymn. Stralsund, 1894).

REIJES P. — *Note sur le théoreme de Pythagore et la géométrie non euclidienne.* (Bullettin de la Société Math. de Kasan, 21, VII, 1897).

RETHY. — *Die fundamental Gleichungen der nicht-Euklideschen Trigonometrie auf elementarem Wege abgeleitet.* (Grunert's Archiv. LVIII, 1876).

ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE. — *Traité de Géométrie.* (Nota II della sesta edizione, Paris, 1891).

SALETA F. — *Exposé sommaire de l'idée d'espace au point de vue positif.* (Paris, 1872).

SBRANA. — *Il teorema di Pitagora ed il postulato delle parallele.* (Besso — Periodico di matematica, IV, 1889).

SCHULER FR. W. — *Ueber das Axiom (den Satz) von Winkelsumme in Dreieck.* (Programmabhandlung, Realsch. Ansbach. Fokc's Verlag. Leipzig, 1890).

SCHULER FR. W. — *Der Satz von der Winkelsumme in Dreieck, oder das XI Axiome des Euklid.* (München. In Selbstverlage des Verf, 1891).

Id. *Der Satz von der Winkelsumme in Dreieck, oder das XI Axiom des Euklid.* (München, 1893).

SCHMIDT H. — *Geometrische Untersuchungen* (Crelle, CXII, 1893).

SCHMITZ-DUMONT. — *Die Bedeutung der Pangeometrie* (Leipzig, 1877).

SEMIKOLONOW G. — *Studien über die Geometrie von Lobatschewsky.* (Teil I, Libau, 1893; Teil II, Libau, 1894).

SIBIRIAKOFF M. — *Les principes de la géométrie élémentaire.* (Moscow, 1887).

SIMON M. — *Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie.* (Strassburg, R. Schultz, 1890).

Id. *Elementar-geometrische Ableitung der Parallelenconstruction in der absoluten Geometrie.* (Crelle, CVII, 1890).

Id. *Ueber das Parallelenaxiom.* (Deutsch. Math. Ver. I, 1892).

Id. *Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie.* (Crelle, CIX, 1892).

Id. *Zur Volumenbestimmung in der Lobatchefsky'schen Geometrie.* (Math. Ann. XLII, 1893).

Id. *Construction der Tangente an Kreis und Grenzkreis und Beweis, das der Lobatshefsky'schen Raum ein doppelt unendliche menge von Kugeln mit unendlich grossem Radius enthalt.* (Deutsche Math. Ver, III, 1894).

SIKSTEL W. — *Einige Folgerungen des XI Axiom.* (Pädag. Samml, VI, 1896).

Digitized by Google

STAWELL BALL. — *The Non-Euclidian Geometry.* (Hermathena, IX).
STORY W. E. — *On the non Euclidian trigonometry.* (Am. Jour. IV, V, 1882-83).
SPITZ C. — *Die ersten Sätze vom Dreiecke und den Parallelen. Nach Bolyai's Grundsätzen.* (Grunert's Arch. LVII, 1877).
SUINI A. — *Sulla teoria delle parallele.* (Besso — Periodico di Mat. IV, 1889).
TARRY G. — *Géométrie générale.* (Ass. Franc. XVIII, 1889).
VACHTCHENKO-ZAKHARTCHENKO. — *Introduction aux Elements d'Euclide.* (Kieff, 1880).
VERONESE G. — *Fondamenti di Geometria a più dimensioni ed a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare.* (Padova, Tipografia del Seminario, 1891. Trad. tedesca, Leipzig, Teubner, 1894).
Id. *Osservazioni sui principi della geometria* (Padova, Atti, X 1894).
Id. con P. GAZZANIGA. — *Elementi di Geometria.* (Verona, 1897).
VARISCO D. — *Complementi di pangeometria.* (Gior. Mat. XXVII, 1890).
VIVANTI G. — *Osservazioni sulla nota del Dott. D. Varisco.* (Gior. Mat. XXVII, 1890).
WIENER. — *Weiteres über Grundlagen und Aufban der Geometrie.* (Deutscher Mat. Ver, III, 1894).
WITRE G. — *Parallelentheorie.* (Wolfenbüttel, 1867).
YOUNG G. P. — *The relation which can be proved to subsist between the Area of a Plane Triangle and the Sum of the Hypothesis that Euclid's twelfth Axiom is false.* (Canadian Journal of Industry, Science ecc., V, 1869).
ZOLT (de) A. — *Saggio di Pangeometria.* (Gior. Mat. XV, 1877).

(Continua)

RECENSIONI ED ANNUNZI

Oeuvres mathématiques de Riemann, traduites par L. LAUGEL, *avec une préface de M. Hermite e un discours de M. Felix Klein.* 8.° gr. p. XXXV + 153 — (Paris 1898; prezzo L. 14).

I matematici francesi devono esser grati al Sig. L. Laugel per essersi egli coraggiosamente accinto all'utile impresa di tradurre, e presentare riuniti in un solo volume, i lavori più importanti del Riemann, di alcuni dei quali soltanto era finora stata pubblicata la traduzione francese.

Digitized by Google

Le poche memorie che ancora non figurano nel volume testè pubblicato e che dovettero essere ommesse per ragioni d' indole tipografica, potranno più opportunamente trovar posto in una seconda edizione, che certo non si farà molto aspettare (1).

Il volume è presentato da un entusiastica prefazione dell' Hermite di cui val la pena di citare le prime frasi: « L'ouvre de Bernhard Riemann est la plus belle et la plus grande de l'Analyse à notre epoque; elle laissera dans la science una trace imperissable. Les geometres contemporains s'inspirent dans leur travaux de ses conceptions, ils en revèlent chaque jour par leurs découvertes l'importance et la fecondité ».

A questo inno di gloria dell' Hermite tien dietro un discorso di Klein nel quale vien caratterizzata a larghi tratti l'influenza di Riemann sulla matematica moderna. Egli si ferma sopratutto su ciò che, a suo parere, costituisce la base comune delle speculazioni di Riemann e la sorgente di tutti i loro sviluppi. Allo stesso modo, egli dice, che in fisica un fenomeno particolare viene determinato dal verificarsi e sovrapporsi d' un certo numero di condizioni, così Riemann individualizza le funzioni per mezzo delle differenti condizioni limitative a cui le assoggetta. La formola di cui si ha bisogno, per lo studio della funzione per mezzo del calcolo, si presenta allora come il risultato delle ricerche e non come il loro punto di partenza. I metodi introdotti da Riemann sembrano, cioè, al Klein, esser sopratutto caratterizzati da ciò, che essi hanno allargata la sfera d' applicabilità dell' analisi matematica alle ricerche fisiche, rendendo possibile una più immediata e intima utilizzazione (Verwerthung) dei dati sperimentali e delle ipotesi che essi suggeriscono. Per usare le sue parole: « Quello stesso ufficio che ha in fisica la negazione delle forze a distanza e la spiegazione dei fenomeni per mezzo delle forze agenti nell' interno di un etere che riempie tutto lo spazio, è adempiuto in matematica dalla definizione delle funzioni mediante il loro modo di esistere nel campo infinitesimale e per conseguenza per mezzo delle equazioni differenziali a cui soddisfanno ». Proseguendo in questo ordine di considerazioni egli va fino al punto di stabilire un parallelismo tra il modo di procedere di Riemann e quello di Faraday. Egli ritorna sullo stesso soggetto a proposito dell' impiego che Riemann fa continuamente dell' « intuizione » geometrica o fisica, e della parte che questa ha avuto nel guidarlo alle sue scoperte e nel suggerirgli delle linee d' investigazione nuove e sfuggite ai suoi antecessori. Ed egli aggiunge che, alla loro volta, i procedimenti che Riemann ha desunto dall' intuizione fisica

(1) Ciò è sopratutto da augurarsi per l'importante memoria sul moto d'un elissoide fluido omogeneo.

Digitized by Google

per applicarli alla pura analisi, sono diventati della più grande importanza e fecondità per le ricerche di fisica matematica, ed allude ripetutamente, a questo proposito, alle applicazioni che dei principi di Riemann si fecero allo studio delle proprietà delle correnti permanenti di fluidi in regioni a due dimensioni. Passando a parlare del contrasto tra il metodo di Riemann e quello di Weierstrass nello studio delle funzioni di variabile complessa, egli osserva che per quanto essi sembrino diametralmente opposti l'uno all'altro, pure guardando le cose da un punto di vista più elevato non si può a meno di riconoscere che essi si completano e si illuminano a vicenda.

La rapida rassegna che fa il Klein delle varie direzioni nelle quali l'influenza di Riemann si è esplicata, cooperando potentemente allo sviluppo degli studi matematici, potrebbe venir completata coll'aggiunta di qualche notizia sui rapporti che egli ebbe coi matematici italiani e in special modo col Betti, col quale durante le sue prolungate permanenze in Italia (1) ebbe frequentemente occasione di entrare in comunicazioni, mettendolo spesso a parte anche dei suoi più intimi pensieri (2). I lavori del Betti sull'estensione della teoria della connessione agli iperspazi, non meno degli altri sulle funzioni algebriche e sulle funzioni ellittiche (il qual soggetto egli aveva prima cominciato a trattare seguendo un metodo originale che ha prevenuto quello, reso noto solo posteriormente, del Weierstrass) e su varie questioni di fisica matematica si connettono all'indirizzo dato all'analisi ed alla fisica matematica dal Riemann. La grande opera del Dini sulla serie di Fourier, le sue lezioni sulle funzioni ellittiche e le sue ricerche fondamentali sulle condizioni d'integrabilità e derivabilità delle funzioni: quelle del Casorati sulle funzioni di variabile complessa: la considerazione, da quest'ultimo introdotta, delle superficie di Riemann a infiniti fogli per la diretta inversione degli integrali abeliani, rappresentano altrettanti sviluppi che o hanno un intimo legame, o almeno risentono l'influenza dei metodi e dell'indirizzo di ricerca iniziato dal Riemann. E lo stesso analogamente si può dire delle classiche ricerche del Beltrami, sulla curvatura degli spazii che hanno sviluppato con mirabile metodo, ed in così varie direzioni i germi della dottrina posta dal Riemann.

G. VAILATI.

(1) Al Riemann venne anche offerta una cattedra all'Università di Pisa.
(2) Vedi per es. la lettera di Riemann del 21 Gennaio 1864.

Digitized by Google

E. PASCAL. *Repertorio di matematiche superiori* (*definizioni — formole — teoremi — cenni bibliografici*). I Analisi. Manuale Hoepli, 1898, p. XV + 642. (L. 6).

Si nota da qualche tempo nei matematici una tendenza verso i lavori di sintesi, aventi per iscopo di esporre in compendio le ultime conquiste della scienza: tale tendenza è indubbiamente il prodotto della persuasione che il dominio da questa occupato è tanto vasto ed accidentato che per conoscerlo ed eventualmente percorrerlo occorrono carte topografiche ben più esatte delle enciclopedie e dei dizionari che vennero compilati in quest'ultimo secolo. Come sintomo di tale tendenza stanno parecchi lavori progettati o compiuti, individuali e collettivi; come nuova manifestazione di essa ci si presenta il *Repertorio* del Prof. Pascal, opera che, per adoperare le parole stesse dell'A., ha per scopo di « riunire nel più breve spazio possibile un riassunto di quasi tutte le principali teorie della matematica (1), dando di ciascuna teoria solo quanto basti, perchè un lettore possa in essa orientarsi e sapere a qual libro ha da ricorrere per avere maggiori particolari e più diffuse indicazioni ». Non è còmpito nostro il determinare il grado di utilità che possiede un'opera di tale natura; notiamo invece che per iscriverla conviene disporre di vasta coltura, di pratica nell'insegnamento e di una ricca biblioteca, cose tutte che possiede l'egregio professore dell'Università pavese. Niuna meraviglia pertanto se, nell'insieme, egli abbia raggiunto l'intento che si è prefisso. Saremmo soltanto tentati di fare qualche riserva sull'ordinamento della materia; non lo facciamo riflettendo che quelle da noi giudicate come imperfezioni risulterebbero affatto insignificanti ove l'opera che ci sta sott'occhio si chiudesse con un indice analitico delle materie ed un indice alfabetico degli autori; sono questi complementi indispensabili a qualunque opera di consultazione, e noi auguriamo di trovarli nel II Vol. del *Repertorio* — dedicato alla *Geometria* — che l'Editore promette di pubblicare ben presto. G. L.

T. L. HEATH. *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections. Edited in modern notation, with Introductions including an Essay on the earlier History of the subject.* Cambridge, University Press, 1896, 8.°, p. CLXX + 254. — *The Works of Archimedes. Edited in modern notation, with Introductory Chapters.* Cambridge. University Press, 1897, 8.°, p. CLXXXVI + 326.

Una delle principali ragioni per cui le opere degli antichi matematici hanno oggi scarsa diffusione tra gli studiosi è che questi in-

(1) Escluse la Meccanica e la Fisica matematica.

Digitized by Google

contrano gravi difficoltà ad intenderli in causa della enorme differenza che corre tra il modo in cui essi esprimevansi e lo stile in cui attualmente si scrive. Perciò, a chi intende ricondurre gli scienziati alle fonti di tutto il nostro sapere, il primo (e fors'anche il migliore) metodo che si presenta è quello di far comparire le investigazioni considerate come classiche sotto veste moderna. E questo appunto si propose di fare ed egregiamente fece il sig. Heath, prima per Diofanto (1) ed ora per Apollonio ed Archimede. Se il lavoro che egli dedicò al principe degli aritmetici greci ottenne l'approvazione dei competenti, lodi ancor più incondizionate merita il Sig. Heath pei preziosi commenti, storici e critici, di cui corredò le immortali ricerche dei due Greci che furono i più eminenti cultori della geometria superiore. Lo spazio ci fa difetto per estenderci in una completa disamina delle opere che annunciamo, onde ci è forza limitarci ad osservare che il nostro autore. sfruttando abilmente la vasta letteratura sulla matematica greca (2), pone in grado chi legge di misurare quanto operarono i due grandi geometri dei quali egli si occupa, col presentare un quadro della scienza anteriore, e di penetrare nell'intimo dei loro pensieri, coll'esporre le caratteristiche dei loro metodi. Quando avremo aggiunto che un capitolo speciale di ogni volume è dedicato alla terminologia adoperata, avremo completata l'enumerazione delle ragioni per cui noi auguriamo alle ottime opere dell'Heath una larga diffusione e facciamo voto perchè presto veda la luce un nuovo volume congenere dedicato ad un altro sommo matematico greco, ancor meno conosciuto di Diofanto, Apollonio ed Archimede, cioè a Pappo: a tal voto si associeranno, siamo certi, tutti coloro che sanno quale inesauribile miniera di interessanti e poco note verità geometriche sia la *Collezione matematica*.

G. L.

Prof. Dott. Wilhelm Killing. — *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* (1.ter Band, 1893, p. X + 357; Marchi 7; 2.ter Band, 1898, p. VI + 361; Marchi 7).

In quest'opera l'Autore prende in esame alcuni fra i concetti e i postulati fondamentali della Geometria, domandandosi in particolare se e in qual misura sia necessario ricorrere a ciascuno di essi per costruire questa scienza. Così facendo, egli espone anche lo stato attuale delle ricerche sui fondamenti della geometria, sotto ciascuno dei vari punti di vista rispetto a cui ricerche consimili furono sinora com-

(1) *Diophantos of Alexandria; a Study in the History of Greek Algebra*. Cambridge, 1885.

(2) L'unico importante lavoro che gli è sfuggito ci sembra essere la memoria di Housel, *Les coniques d'Apollonius*. (G. di Liouville, 1858).

Digitized by Google

piute. È bene anche avvertire subito che « Geometria » è per lui semplicemente lo studio delle proprietà dello spazio « fisico » che ci circonda, considerato come insieme di punti; sicchè questa parola viene ad avere un significato più ristretto di quello che altri, e forse i più, tenderebbero oggi a attribuirvi.

In tutta l'opera, e più specialmente nel 1.° volume, la maggior parte delle considerazioni si riferiscono alla « Geometria non Euclidea », e l'A. tende sempre a mettere in evidenza come le tre geometrie metriche — parabolica, iperbolica ed ellittica — siano tutte egualmente possibili.

Nel 1.° capitolo l'A. comincia collo stabilire che il postulato di Euclide non è conseguenza necessaria delle proposizioni che lo precedono nei classici « Elementi »; a ciò lo conducono le considerazioni, ormai notissime, della geometria di una superficie a curvatura costante negativa, e della geometria proiettiva della regione di piano o spazio interna a un cerchio o a una sfera (più generalmente a una conica o quadrica, sempre reale). – Ammettendo poi che non sia più verificato il postulato di Euclide, bensì però tutte le altre proposizioni fondamentali della geometria euclidea, egli costruisce la geometria di Lobatschewsky. — E dalle analogie che sussistono fra il piano (euclideo o di Lobatschewsky) e la superficie sferica — colla differenza tuttavia che sopra quest'ultima superficie le geodetiche (cerchi massimi) sono linee chiuse, — egli è condotto ancora a una terza geometria, nella quale si suppone tolto il postulato dell'infinità della retta; anzi quest'ultima ipotesi si può render verificata in due modi diversi (geometria Riemanniana (1) e Kleiniana), secondo che le geodetiche uscenti da un dato punto qualsiasi passano tutte, oppure non passano, anche per un secondo punto distinto dal primo. — Desiderando poi dare a queste diverse geometrie un punto di partenza uniforme e la cui verità o meno possa esser decisa (p. 77) mediante l'esperienza (?), l'A. è condotto a parlare delle ricerche del P. Saccheri (2). Infine, osservato che, in ciascuna di queste ipotesi, le proposizioni della geometria euclidea sono verificate o in via assoluta, o come caso limite, egli si domanda quali proposizioni vengano ad essere rigorosamente vere nello spazio quando si suppongano verificate approssimativamente (conforme ai dati dell'esperienza) quelle della geometria euclidea; ovvero, formulando la questione in modo più preciso, quali proprietà valgano per regioni finite delle spazio quando in un campo infinitesimo si suppone verificata la geometria euclidea. E ancora egli trova possibili

(1) Sulla poca opportunità di questo nome ha già insistito più volte il Klein (Lez. litogr., e Mathem. Ann., vol. 37).

(2) « Euclides ab omni naevo vindicatus.... » (1733).

Digitized by Google

soltanto le stesse tre (o quattro) geometrie. Il ragionamento al quale ricorre per questa dimostrazione fu usato per la prima volta, almeno nella sua parte sostanziale, dal Flye S. Marie nei suoi « Etudes analytiques sur la théorie des parallèles (1871) (1) »: esso comprende talune considerazioni di calcolo infinitesimale, non sostituibili forse da altre puramente sintetiche e altrettanto rigorose; ma ha il vantaggio di riferirsi soltanto a regioni finite dallo spazio, il che non sembra potersi ottenere per altra via. P. e., nella dimostrazione data da Legendre del teorema, che la somma degli angoli di un triangolo non può essere maggiore di due retti, si devono far crescere oltre ogni limite due lati del triangolo che si considera.

Nel 2.° Capitolo il Killing costruisce la *Geometria Proiettiva* per una data regione *finita* qualsiasi dello spazio: qualche aggiunta sarebbe però necessaria alla dimostrazione dell'unicità del punto quarto armonico dopo tre punti dati, perchè, entro una regione finita dello spazio, non si può affermare che due rette di un piano ($\alpha\beta'$ e $\alpha'\beta$: p. 100) abbiano necessariamente un punto a comune. Sulla forma di 1.ª specie viene poi distesa la variabile numerica; questione ormai notissima, ma per la quale occorrerebbe anche, forse, qualche parola di più; l'argomento ricompare però ed è completato in seguito (vol. 2.°, cap. 6.°), benchè non colla maggiore semplicità possibile. Si giunge così all'introduzione delle coordinate proiettive, anche nel piano e nello spazio, e alla rappresentazione delle trasformazioni proiettive con sostituzioni lineari di queste coordinate. — Il movimento di una retta sopra sè stessa, essendo una particolare trasformazione proiettiva, si rappresenterà con una sostituzione lineare (reale) della variabile assunta su tale retta come coordinata; e secondo che questa sostituzione è iperbolica, parabolica o ellittica — lascia fissi cioè due valori reali e distinti della variabile, oppure un valore unico, o nessun valore reale, — si hanno tre diversi casi che si ritrovano appunto nella trattazione analitica delle tre geometrie metriche rispett. omonime già incontrate nel cap. prec.

Il cap. 3.° — che si stacca sensibilmente dagli altri del 1.° volume — è dedicato alle varietà a più dimensioni. Di queste varietà è detto per quali vie si siano presentate nella scienza; come il concetto loro si trovi nella « Ausdehnungslehre » di Grassmann, e risulti spesso utile nella trattazione di questioni analitiche con un numero superiore a tre di variabili indipendenti. Parlando però della possibilità di concepire lo spazio ordinario (secondo le idee di Plücker) come una varietà avente un diverso numero di dimensioni a seconda dell'ente

(1) In quest'opera si introduce però il postulato dell'infinità della retta, e risultano perciò possibili soltanto la geometria euclidea e quella di Lobatschewsky.

Digitized by Google

geometrico che se ne assume come *elemento*, l'A. è condotto a esporre delle vedute (p. 267) che non possiamo completamente accettare; come pure non possiamo consentire nel risultato finale della sua discussione (p. 265), che cioè la geometria a più dimensioni, anche nel senso più ristretto in cui egli intende la parola « geometria », è logicamente possibile, « benchè *contraria* ai dati dell'esperienza » (« obwohl sie der Erfahrung widerstreitet »). Il fatto che lo spazio di punti appare a noi come una varietà a tre dimensioni non basta per escludere ch'esso possa avere un numero anche maggiore di dimensioni, essendo però noi in condizione di percepirne solamente tre.

Il concetto più notevole di questo 3.° cap. è quello che conduce l'A. a definire una varietà a n dimensioni mediante la « *divisione* » o « *divisibilità* » (« Teilung ») *ripetibile* n *volte successivamente e non di più* (in modo che dopo le n volte si giunga all'elemento della varietà stessa, il quale si suppone non ulteriormente divisibile). Così p. e. lo spazio ordinario (a tre dimensioni) può dividersi in due parti mediante una superficie, questa anche in due parti mediante una linea, e la linea infine pure in due parti mediante un punto (elemento dello spazio). Non so però se la definizione di varietà a n dimensioni che così può darsi sia del tutto soddisfacente; invero, il concetto del limite comune (« Gegenseitige Grenze ») di due parti di una data varietà avrebbe forse bisogno di essere maggiormente chiarito.

Il cap. 4.° (ultimo del 1.° vol.) è forse il più interessante di tutta l'opera, benchè esso si limiti a riprodurre, con poche aggiunte, il contenuto della Memoria del Killing avente lo stesso titolo: « Ueber die Clifford-Klein'schen Raumformen » e pubblicata nel vol. 39.° dei Mathem. Annalen (1891). Il concetto fondamentale che ha dato origine alle ricerche su queste varietà è quello che la proprietà generalmente attribuita allo spazio di potersi muovere sopra sè stesso con un certo grado di libertà (e precisamente, nell'ipotesi della triplice dimensione, in ∞^6 modi diversi) eccede i risultati delle nostre osservazioni; poichè queste ci dicono soltanto che *regioni opportunamente limitate* dello spazio possono muoversi con quel certo grado di libertà. — Ora, di queste due proprietà, la prima non è affatto conseguenza della seconda; e le varietà (a due, tre, o più dimensioni) alle quali spetta quest'ultima proprietà e non la prima sono state designate dal Killing col duplice nome di *Clifford-Klein*, perchè a questi scienziati siamo debitori dei primi esempi di esse, e il Klein fu anzi il primo a dimostrarne col ragionamento la possibilità. — Considerato il movimento come una particolare trasformazione dello spazio o di una sua regione, possiamo anche dire che, per uno spazio il quale possa muoversi sopra sè stesso tutto intero col necessario grado di libertà, un movimento è sempre una trasformazione che risulta già

Digitized by Google

individuata per l'intero spazio quando sia conosciuta per una regione finita di esso, comunque piccola — ossia una trasformazione suscettibile, a partire da questa regione, di una prosecuzione unica; — mentre invece per una forma di Clifford-Klein questa prosecuzione potrà ottenersi in una serie discreta di modi diversi. Si può anche dire che, dati due sistemi rigidi invariabilmente connessi fra loro, e supposto di assoggettare uno di essi a un certo movimento, il movimento corrispondente dell'altro sistema sarà completamente individuato nel primo caso, mentre invece nel secondo caso esso dipenderà anche dal modo in cui quest'altro sistema è legato al primo (ossia dalla natura dei vincoli). E mentre vi sono soltanto quattro forme di spazio (a un numero qualunque ≥ 2 di dimensioni) che ammettono tutto il sistema dei movimenti di un corpo rigido — cioè lo spazio euclideo, lo spazio di Lobatschewsky, e le due forme di spazio ellittico, ossia lo spazio ellittico propriamente detto (o di Klein) e lo spazio sferico (o di Riemann), esistono invece parecchie altre varietà nelle quali una mobilità di egual grado sussiste solo per regioni opportunamente limitate (come p. e. sulla così detta « superficie di Clifford (1) »). Queste varietà non vengono tutte determinate dal Killing: ma è indicata una via (mediante la considerazione di certi gruppi discontinui) per la quale si potrebbero, volendo, determinare. Il maggior numero di esse corrisponde al caso della curvatura negativa (geometria iperbolica).

Mentre il 1.° volume dell'opera del Killing si aggira tutto intorno alle questioni generate dal postulato di Euclide e da quello della triplice dimensione dello spazio, nel 2.° volume vengono invece presi in esame molti altri fra i postulati e i concetti fondamentali della geometria.

Nel cap. 5.°, richiamate alcune considerazioni già esposte al cap. 3.° sulla triplice divisibilità dello spazio, l'A. mostra come la « divisibilità » e il « movimento » (« Teilung » und « Bewegung ») siano due concetti veramente fondamentali per la geometria. Di quest'ultimo concetto ha tentato di fare a meno Riemann, prendendo le mosse, per costruire la geometria, da sole nozioni metriche; ma la « interessante teoria analitica » contenuta nella sua Dissertazione non costituisce ancora, secondo il Killing, una vera base della geometria. — A questi due concetti occorre aggiungere il principio di continuità, del quale è fatto uso anche in Euclide, benchè esso non vi sia esplicitamente enunciato; e che risulta necessario (ad es. sotto la forma del principio di Archimede) per parlare della misura dei segmenti (2). Di qui l'A. è

(1) Cfr. ad es. KLEIN: Math. Ann., vol. 37.

(2) Nella geometria iperbolica i segmenti determinati da un punto reale e da un punto ideale sono misurati da numeri immaginari (e non infiniti); perciò non è forse il caso di dire (p. 71) che, dati un segmento siffatto e un segmento reale, ogni multiplo del secondo è *minore* del primo.

Digitized by Google

condotto a parlare brevemente dei numeri trasfiniti di Cantor e di quelli di Veronese; ma conclude poi che sulla questione della misura dei segmenti non si può ancora dire l'ultima parola.

Nel cap. 6.° l'A. ritorna alla geometria proiettiva, e conclude (con una certa soddisfazione) che questa si può costruire senza far uso affatto di concetti metrici. — Si diffonde ampiamente sull'opportunità di cominciare col costruire la geometria proiettiva in uno spazio limitato, tanto più che anche l'intero spazio sferico (Riemanniano) può considerarsi come uno spazio proiettivo, nel quale tuttavia ogni stella avrebbe due diversi centri, e altre proposizioni si modificherebbero leggiermente in conseguenza. — Parlando dei sistemi di postulati che si possono mettere a base della geometria proiettiva, si dilunga sopra un lavoro dello scrivente (1), che risale al 1891; ma non fa alcun cenno dei lavori successivi sullo stesso argomento, fra cui una Nota del Sig. Enriques (2), dalla quale risulta colmata (con un opportuno postulato, di necessità indubbia) l'unica lacuna che il Sig. Killing crede ancora di rilevare nella trattazione della geometria proiettiva. — E ritornando sulla corrispondenza biunivoca che può stabilirsi fra il sistema dei valori reali di una variabile numerica e l'insieme degli elementi di una forma di 1.ª specie, egli osserva giustamente (p. 79), benchè in modo non del tutto esplicito (3), che il fatto che anche ad ogni numero irrazionale corrisponde un elemento unico della forma considerata equivale al contenuto proiettivo del postulato di Archimede. — Accenna infine ai diversi modi in cui dalla geometria proiettiva si può discendere alla geometria metrica (euclidea e non euclidea), evitando così l'introduzione a priori del concetto di movimento (e mostrando per conseguenza come tale introduzione non sia assolutamente necessaria): questi sviluppi completano, e in parte anche semplificano quelli del cap. 2.° — Un modo, d'altronde notissimo, di giungere alla geometria metrica è quello di istituire nello spazio — nel quale si suppone nota la geometria proiettiva — una determinazione metrico-proiettiva (secondo Cayley-Klein) rispetto a una quadrica (immaginaria, reale e non rigata, oppure, come caso limite, degenerata in una conica-inviluppo immaginaria); ovvero, il che fa lo stesso, di restringere il « gruppo fondamentale » della geometria da costruirsi, sostituendo al gruppo proiettivo totale dello spazio il gruppo di quelle sole trasformazioni proiettive che mutano in sè stessa la quadrica fondamentale. — Un altro modo (che richiede però cognizioni inerenti alla

(1) *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni* (Giorn. di Matem., vol. XXX).

(2) *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva* (Rend. Ist. Lomb., 1894).

(3) Molto più esplicitamente quest'osservazione è contenuta nelle *Lezioni di geometria proiettiva* (litogr., o a stampa) del Sig. Enriques).

Digitized by Google

teoria generale dei gruppi di trasformazioni) si può dedurre dall'osservazione che, almeno entro una regione di spazio opportunamente limitata, esistono sempre dei movimenti che sovrappongono due punti, due rette, o due piani comunque assegnati. Domandando pertanto quale sia il più piccolo gruppo proiettivo, transitivo tanto rispetto al sistema dei punti, quanto rispetto ai sistemi dei piani e delle rette dello spazio, si trova un gruppo dipendente da una costante arbitraria (curvatura dello spazio); e si ha la geometria metrica ellittica, parabolica o iperbolica secondo che a questa costante si attribuisce un valore positivo, nullo o negativo. — Vi è infine anche un terzo modo, al quale è dedicato il § 6 del presente capitolo. Si parte ivi dall'ipotesi che un piano possa muoversi intorno a un suo punto (fisso), in modo però che uno e quindi ogni altro punto del piano stesso si sposti soltanto sopra una linea chiusa (cerchio). Aggiungendo qualche altra ipotesi, che può compendiarsi nell'esistenza di un secondo cerchio in un piano perpendicolare al primo, si hanno condizioni sufficienti per caratterizzare i (soli) gruppi fondamentali delle solite tre geometrie metriche.

Nel cap. 7.° il Killing discute le definizioni degli enti geometrici fondamentali (punto, retta, piano. linea, superficie, angolo, ...) state date dai diversi Autori; indotto a ciò anche dal fatto che alcuni fra questi non convengono nell'idea di assumere la retta — come si fa appunto nella geometria proiettiva — come elemento fondamentale non definito (1). — Insiste pure (§ 5) sul fatto che conviene partire dal concetto di corpo, datoci dalla natura, e da questo dedurre quelli di superficie, linea, punto, anzichè partire dal punto — concetto che non può raggiungersi senza un'operazione di astrazione — e generare poi la linea mediante il movimento di un punto, e così successivamente (al che si possono anche muovere altre obbiezioni). — Si diffonde poi l'A. a parlare della definizione di spazio contenuta nella *Logica* di Wundt, e delle ricerche contenute in tre opere sui fondamenti della geometria, vale a dire:

Überweg: *Die Principien der Geometrie, wissenschaftlich dargestellt* (1851);

De Tilly: *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* (1879);

Veronese: *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee* (1891).

Non è qui il caso di entrare in dettagli su ciò che il Killing dice di ciascuna di queste opere; aggiungeremo invece che, dopo averle tutte esaminate, propone egli stesso un sistema di concetti e proposi-

(1) E non è nemmeno necessario fare altrettanto per il piano, potendo questo definirsi mediante la retta.

Digitized by Google

zioni fondamentali (« Grundbegriffe » und « Grundsätze »), sul quale si può fondare la geometria, e che a lui sembra il più naturale fra i tanti possibili. I concetti da cui egli parte sono quelli di spazio, corpo rigido, parte di spazio o di corpo, spazio occupato da un corpo, *tempo*, *riposo*, *movimento*; essi vengono messi reciprocamente in relazione da sette proposizioni fondamentali, ma l'A. non si ritiene ancora sicuro che queste siano veramente sufficienti per costruire tutta la geometria.

La questione analoga per uno spazio a più dimensioni non presenta, rispetto a questa, differenze sostanziali.

L'ultimo capitolo (8.°) è dedicato alla teoria generale dei gruppi continui di trasformazioni, e alle applicazioni di questa teoria ai fondamenti della geometria. Tali applicazioni si aggirano principalmente intorno al notissimo « Problema di Riemann-Helmholtz », del quale l'illustre Autore della *Theorie der Transformationsgruppen* ha data un'accurata discussione e notevolissime soluzioni; esse richiedono però che per le varietà (spazi) di cui si tratta si sia dimostrata o si ammetta la rappresentabilità degli elementi con coordinate, e che si facciano anche opportune ipotesi sulle funzioni che compaiono nella rappresentazione analitica dei movimenti. Dopo aver parlato della celebre Memoria di Helmholtz e delle importantissime ricerche del Lie, il Killing muove alle ipotesi introdotte da quest'ultimo scienziato l'appunto di essere poco intuitive; e le sostituisce perciò con alcune altre, atte pure a caratterizzare i gruppi dei movimenti di uno spazio euclideo o non euclideo.

Viceversa, anche da ogni gruppo continuo transitivo in n variabili si può ritenere definita una varietà (« Raumform ») a n dimensioni, nella quale le n variabili sarebbero da assumersi come coordinate, e il gruppo proposto, limitatamente almeno a regioni opportune, sarebbe il « gruppo fondamentale » della varietà stessa. Ciò viene illustrato dal Killing con alcuni esempi, tratti in gran parte dalle ricerche del Lie. Più esattamente, viene così definita soltanto una certa regione di varietà, avente una determinata geometria; e questa regione potrà eventualmente estendersi in più di un modo, dando luogo a altrettante varietà diverse, le cui geometrie coincideranno (come per il piano euclideo e la superficie di Clifford) entro regioni opportune.

G. Fano.

W. W. Rouse Ball, *Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes. Troisième édition révue et augmentée par l'Auteur, traduite par* J. Fitz-Patrick, 8.°, p. IV + 352. Paris, A. Hermann, 1898. (L. 9).

L'opera di cui annunciamo la traduzione francese appartiene ad una categoria di scritti la quale, se non ci inganniamo, non ha alcun rap-

Digitized by Google

presentante nella letteratura italiana. Il rapido succedersi delle tre edizioni che ebbe in Inghilterra è sufficiente attestazione dei meriti che in essa vennero ravvisati e che indiscutibilmente possiede, sicchè dobbiamo felicitarci che la versione ora eseguitane presumibilmente ne agevolerà la diffusione fra noi. I temi svolti sono tanto varî ed attraenti che ben poche persone colte non vi troveranno qualche cosa che li interessi. Così il professore di matematiche elementari troverà (Cap. I, II e III) la esposizione di alcune conseguenze paradossali a cui si arriva applicando senza riguardo certe regole valide soltanto in alcuni casi, e il dilettante di storia quella dei tre più celebri problemi dell'antica geometria; così dal libro del Ball si può apprendere la costruzione dei quadrati magici, ipermagici, diabolici ecc. (Cap. V) e molte ingegnose ricerche aventi stretta attinenza coll'*analysis situs* (Cap. VI e VII); nè sono taciute certe difficili questioni collegate al giuoco degli scacchi od ai giuochi di carte (Cap. IV) e le principali notizie sull'astrologia (Cap. IX). Maggiore importanza hanno le informazioni somministrate dall'autore sugli iperspazi e gli spazî non-euclidei (Cap. X), sul tempo e la sua misura (Cap. XI), e sulla materia e l'etere (Cap. XII).

Il traduttore ha aggiunto del suo parecchie buone osservazioni; ma sarebbe stato desiderabile che, come fu scrupoloso nel riprodurre il pensiero del suo autore, fosse stato del pari diligente nella correzione delle prove di stampe.

G. L.

J. C. Poggendorff's *Biographisch-litterarischer Handwörtenbuch zur Geschichte der exacten Wirsenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen, Geographen, u. s. w alles Völker und Zeiten. Dritter Band (die Jahre 1858 bis 1883 umfassend) herausgegeben von* D.r B. W. Feddersen *und* Prof. Dr. A. J. von Oettingen. Leipzig, A. Barth., 1898, p. VIII + 1495, 8.° gr.

I primi due volumi di questa preziosa opera di consultazione vennero pubblicati nel 1863; e chi mai potrebbe descrivere e misurare i servigi che essi prestarono a tutti coloro che si occupano di scienze matematiche e naturali?... Ma per quanto buoni siano, presentano lacune ed inesattezze: colmare le une e togliere le altre fu occupazione costante del Poggendorff sino al termine della sua operosa esistenza (24 Giugno 1878). Alla sua morte, il materiale complementare raccolto passò all'editore Barth, il quale lo affidò al D.r Feddersen, affinchè egli preparasse un terzo volume dell'ottimo dizionario. Ed il Feddersen

Digitized by Google

se ne occupò attivamente sino al 1882, ma poi per un decennio interruppe l'intrapreso lavoro; e verso il 1894 propose all'Oettingen di condurlo a termine e questi accettò. D'accordo coll'editore si convenne poi di distribuire il materiale esistente e quello che verrà in seguito adunato in due volumi, contenenti uno la letteratura sino al 1883, l'altro i lavori usciti entro il resto del secolo presente. È il primo di questi volumi che oggi abbiamo il piacere di annunciare. Non ne tesseremo un lungo elogio: basti dire che esso è meritevole di prendere posto accanto ai due che lo precedettero e siamo certi che, al pari di quelli, sarà considerato come uno di quei libri che convien sempre avere sottomano, sicuri di potervi attinger notizie ampie e sicure sopra qualunque persona abbia ben meritato dalla scienza. E poichè nel volume venturo si terrà conto delle correzioni necessarie al presente, così è desiderabile che tutti coloro che nell'adoperare questo vi riscontrano delle imperfezioni, dian notizia all'Oettingen delle loro osservazioni. Io intanto, per dare il buon esempio, suggerirò a lui di aggiungere i nomi (cari a noi Italiani) di Vincenzo Flauti, di Achille Sannia e di Nicola Trudi; osservo inoltre che Brioschi, Galileo Ferraris, Padelletti, Ribaucour, Razzaboni, Rubini, Arcangelo Scacchi, San Roberto e Zurria devono malauguratamente venir tolti dall'elenco dei matematici viventi; e gli raccomando di rendere più esatto il catalogo delle opere di Th. H. Martin, chè le indicazioni che egli porge non basterebbero a guidare chi volesse rintracciare i frammenti pubblicati della grande opera che il celebre erudito francese aveva intrapreso sulle ipotesi astronomiche dei Greci.

G. L.

NECROLOGIO

PIETRO RICCARDI

DI D. PANTANELLI

Pietro Riccardi nacque in Modena il 4 maggio 1828. Suo padre professore di matematiche nella Università lasciò a lui con l'amore alla scienza, una ricca biblioteca che fu poi il sustrato di tutti i suoi lavori bibliografici.

Principale per interesse e per mole è la *Biblioteca matematica italiana* estesa a tutto il secolo XVIII e alla quale consacrò venticinque anni della sua vita; comprende le indicazioni, spesso seguite da brevi e chiari commenti, di 8063 opere distribuite tra 2310 autori.

Digitized by Google

Un altro lavoro di mole, inizjato nel 1865 e terminato nel 1889, è la *storia della geodesia in Italia*, generale dai primi documenti storici a tutto il XVIII secolo, limitata alla geodesia elementare nel secolo attuale. Se il precedente è un lavoro di bibliologia, questo è anche di storia della scienza e le prime due parti che arrivano al secolo XIX possono essere lette con piacere da qualunque persona colta, essendo Riccardi, oltrechè profondo conoscitore della materia che tratta, severo e castigato scrittore. Le sue molte pubblicazioni, uscite prima, insieme e dopo le due accennate, sieno scientifiche, storiche o bibliografiche possono dalle precedenti differire per mole, mai per il retto criterio dell' argomento trattato.

Fu ufficiale del genio nel 1848, tornò a vita privata nel 1849 e nell' esercizio della professione allevò una schiera di giovani valenti, sottraendoli all' empirismo che regnava sovrano nella pratica; ebbe la cattedra universitaria di geodesia a Modena nel 1859, di geometria pratica a Bologna nel 1876; si ritirò nel 1888. Dal 1859 in poi fu consigliere comunale e dal 1864 in avanti consigliere provinciale. Fu presidente dell'Accademia di Scienze in Modena e della giunta tecnica catastale nell' ultimo decennio della sua vita. Rimpianto da quanti ebbero la fortuna di conoscerlo e quindi di amarlo, tanto come uomo fu esemplare, cessò di vivere il 30 settembre 1898: la sua morte seguì da vicino quella della sua adorata ed unica nipote, quella della consorte diletta; aveva retto ai più faticosi lavori, cadde sotto il peso della sventura.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI P. RICCARDI.

1852. *Indicazione di alcune opere di matematici modenesi non registrate nella biblioteca del Tiraboschi.* — Modena, Indicatore modenese, anno 2.°, N.i 47-50.

1855. *Necrologia dell' avv. cons. G. Batta Barberi.* — Modena, Distributore N.° 81.

1860. *Sulla riproducibilità delle curve di secondo ordine.* — Teoremi due, Modena, pp. 35 in 8.° con 1 tav.

1861. *Appunti alle considerazioni sull' attuale organamento della pubblica istruzione.* — Modena, Gazzetta di Modena, N.° 63.

1861-63. *Sinossi per la scuola di geodesia.* — Modena, pp. 54 in 8.°

1862. *Tabella dei prezzi applicabili ai prodotti agrari* (in collab. Camurri e Pacchioni) — Modena, pp. 15 in 8.°

1864. *Cenni storici sull' istituto dei cadetti pionieri di Modena.* — Modena, pp. 79 in 8.°

1866. *Lettera a S. E. il principe Boncompagni.* — Modena, pp. 22 in 8.°

Digitized by Google

1866. *Elogio del prof. Antonio Araldi.* — Mem. Ac. S. L. ed A. di Modena, Vol. VIII. Modena, pp. 17 in 4.°

1868. *Memoria di F. Gabriele da S. Onofrio.* — Modena, pp. 24 in 8.°

1869. *Voto peritale nella causa Molza.* — Cuniberti, Modena in 4.°

1869. *Determinazione di alcune formole per la rettificazione dei confini tortuosi dei campi.* — Modena, pp. 18 in 8.° con una tav.

1868-93. *Biblioteca matematica italiana*

1868. *Prefazione ad una biblioteca Matematica italiana.* — Mem. Ac. S. L. ed A. di Modena. Vol. IX, pp. 14 in 4.°; ripubblicata nel seguente pag. IV-XXIX.

1870. Parte I, Vol. I, Modena, pp. I-XXIX, 656 cc. in 4.°

1876. Parte I, Vol. II, Modena, 676 cc. Appendice, 212 cc. in 4.°

1880. Parte II, Vol. unico, Modena, pp. XXII, e una tav. pp. 294 e 54 cc. in 4.° La prefazione alla parte II anche in Mem. Acc. S. L. ed A. di Modena, Ser. I, Vol. XX, 1880, col titolo: *Nota statistica di storia matematica.*

1878-1880-1893. Appendice alla parte I, 228 cc. in 4.°

1872. *Bibliografia Galileiana.* — Modena pp. 36 in 4.°

1872. *Ferrovia Modena-Toscana. Relazione.* — Modena, in 8.°

1873. *Il valico ferroviario dell'Appennino.* — Modena, pp. 9 in 8.°

1873. *Nota intorno ad alcune rare edizioni delle opere astronomiche di Francesco Capuano da Manfredonia.* — Mem. Acc. S. L. ed A. di Modena, Vol. XIV, pp. 23 in 4.°

1873. *Di alcune recenti memorie sul processo e sulla condanna del Galilei.* — Mem. Acc. S. L. ed A. di Modena, Vol. XIV, pp. 79 in 4.°

1873. *Nota ed illustrazione di una pianta di Modena degli ultimi anni del secolo XVII.* — Gior. Muratori, n.° 163, pp. 4, in 8.°

1874. *Apparecchio per la determinazione della linea percorsa da un mobile.* — Mem. Acc. S. L. ed A. di Modena, pp. 3 in 4.° con una tav.

1875. *Teoremi e formole per la misura delle linee, delle superficie e dei solidi.* — Modena, pp. 38 in 4.

1875. *Esercitazioni geometriche.* I. — Mem. Acc. S. L. ed A. di Modena, Vol. XVI, pp. 10 in 4.° con una tav.

1876. *Alcune lettere inedite di Alessandro Volta (Nozze Formiggine Oddone).* — Modena, pp. 73, in 8.°

1876. *Avvicendamenti e rotazione agraria.* — Modena, pp. 12 in 8.°

1876. *Esercitazione geometrica.* II. — Mem. Acc. S. L. ed A. di Modena, Vol. XVII, pp. 14 in 4.° con una tav.

1877. *Sulle opere di Alessandro Volta: Note bibliografiche.* — Mem. Acc. S. L. ed A. di Modena, Vol. XVII, pp. 40 in 4.°

Digitized by Google

1877. *Carte e memorie geografiche e topografiche del modenese.* — Mem. Acc. S. L. ed A. di Modena, Vol. XVII, pp. 39 in 4.°

1877. *Intorno ad un opuscolo di Francesco dal Sole.* — Bull. Bibl. e St. delle Sc. Mat. e Fis., Vol. X, Roma.

1877. *Indice delle materie esposte nel compendio di Geodesia applicata.* — Modena, pp. 32 in 8.°

1877. *Il metro.* — Modena, pp. 10 in 8.°

1877. *Lettera a Boncompagni.* Bullett. St. Sc. Mat. — Roma, pp. 3 in 4.°

1878. *Ragguaglio bibliografico.* — Modena, Campagnolo N.° 17.

1878. *Memorie edilizie modenesi.* I. — *Nota sulla costruzione delle case delle cinquantine vulgo Caselle.* — At. e Mem. Dep. St. patria dell' Emilia, Vol. III, pp. 9 in 8.°

1878. *Nota sul fabbricato delle antiche beccherie.* — At. e Mem. Dep. St. patria dell' Emilia, Vol. III pp. 23 in 8.°

1879. *Nuovi materiali per la storia della Facoltà Matematica dell' antica università di Bologna.* — Bull. di Bibl. e St. Sc. Mat. e Fis., Vol. XII, Roma, pp. 16 in 4.°

1879. — *La perequazione dell' imposta fondiaria nel compartimento modenese.* — Modena, pp. 6 in 8.°

1879. *Notizie della vita e delle opere del Conte Pietro Abbati Marescotti (Nozze Abbati-Marescotti).* — Modena, pp. 15 in 8.°

1879. *Cenni sulla vita e sulle opere di Gemignano Rondelli.* — Mem. Acc. S. L. ed A. di Modena, Vol. XIX, pp. 30 in 4.°

1879-1884. *Cenni sulla storia della Geodesia in Italia dalle prime epoche fin oltre la metà del secolo XIX.* — Atti Ist. scienze di Bologna.

1879. Parte I, id. Vol. X, Serie III, pp. 96 in 4.° con una tav.

1883. Parte II, Cap. I, Vol. IV, Serie IV, pp. 68 in 4.°

1884. Parte II, Cap. II, Vol. V, Serie IV, pp. 166 in 4.°

1880. *Marzaglia — Nota storica.* — At. e Mem. Dep. St. Pat. dell' Emilia, Vol. V, Modena, pp. 24 in 8.°

1880. *Appendice alla nota intitolata: carte e memorie geografiche e topografiche del modenese.* — Mem. Acc. S. L. ed A. di Modena, Vol. XX, pp. 12 in 4.° con una tav.

1881. *Commemorazione di Michele Chasles.* — Ist. Sc. di Bologna, Rendiconti, Bologna, pp. 36 in 8.°

1881. *Elenco di alcune carte geografiche esistenti nella provincia di Modena.* — Modena, pp. 57 in 4.°

1881. *Vigneti a filari.* — Modena, pp. 2 in 8.°

1881. *Catalogo descrittivo degli strumenti del gabinetto di geometria pratica* (in collab. con F. Cavani). *Notizie concernenti la scuola d'applicazione degli ingegneri in Bologna.* — Bologna, pp. 69 in 4.°

Digitized by Google

1882. *Giacomo Manzoni. — Studio di bibliografia analitica.* — Bull. Bibl. e St. Sc. Mat. e Fis., Tomo XV, Roma pp. 6 in 8.°

1883. *Note altimetriche di alcuni punti della provincia di Bologna.* Bologna, pp. 15 in 4.°

1883. *Ancora di G. B. Bellaso dei suoi libretti e delle sue scoperte.* Gior. il Bibl., IV, Bologna, pp. 1 in 4.°

1883. *Almanacco e lunario di Lorenzo de Juvenii da Catania.* — Giorn. il Bibl., IV, Bologna, pp. 1 in 4.°

1883-84. *D. Antonio dè Bergolli (sacerdote) libraio e tipografo modenese del secolo XVI.* — Giorn. il Bibliofilo IV, Bologna, pp. 3 in 4.°

1884. *Di alcuni esemplari di calligrafia antichi e rarissimi.* — Gior. il Bibl., V, Bologna, pp. 3, in 4.°

1885. *Due saggi scolastici dei primi anni del secolo dati da Pellegrino Rossi e da Giov. Maria Mastai.* — Giorn. il Bibl., Anno VI, Bologna, pp. 2 in 4.°

1885. *Almanacchi astrologici del secolo XVIII.* — Giorn. il Bibl., Anno VI, Bologna, pp. 3 in 4.°

1886. *Per una completa collezione delle opere matematiche di Lorenzo Mascheroni.* — Bull. Bibl. e St. Sc. Mat. e Fis., Tomo XIX, pp. 10 in 8.°

1886. *Costruzione di basi geodetiche stabili.* — Atti Ist. Sc. di Bologna, Serie IV, Tomo VI, pp. 7 in 4.°

1886. *Prospetto comparativo dei prodotti agrari.* — Modena, Campagnolo, N.° 9.

1886. *La mia libreria.* — Giorn. il Bibl., Anno VII, Bologna, pp. 6 in 4.°

1886. *Le prime edizioni degli elementi di Euclide.* — Giorn. il Bibl., Bologna, pp. 4 in 4.°

1886. *Note di bibliografia matematica (Bibl. mat. di Enestrom).* — Giorn. il Bibl., VII, Bologna, pp. 1 in 4.°

1887. *Note di bibliografia matematica (Archimede trattato delle spirali).* — Giorn. il Bibl., VIII, Bologna, pp. 1 in 4.°

1887. *Sopra un antico metodo di determinare il semidiametro della terra.* — Atti Ist. delle Sc. di Bologna, Serie IV, Tomo VIII, Bologna, pp. 3 in 4.°

1887. *Nota relativa ad una edizione del nunzio sidereo di Galilei.* — Bibliotheca mathematica, Stockholm, pp. 2 in 8.°

1887. *De quadrata di Giovan Battista della Porta.* — Roma, pp. 2 in 4.°

1887-90. *Saggio di una bibliografia Euclidea.* — Att. Ist. Sc. Bologna.
1887. Parte I e II, Ser. IV, Vol. VIII, Bologna, pp. 124 in 4.°
1888. Parte III, Ser. IV, Vol. IX, Bologna, pp. 22 in 4.°
1890. Parte IV, Ser. V, Vol. I, Bologna, pp. 57 in 4.°

Digitized by Google

1888. *Bibliographie générale de l'astronomie par I. C. Houzeau ancien directeur de l'observatoire royal de Bruxelles et A. Lancaster bibliothécaire de cet établissement.* — Giorn. il Bibl., IX, Bologna, pp. 3 in 4.°

1889. *Di alcune opere di prospettiva di autori italiani omesse nella Histoire de la perspective di M. Poudra.* — Bibliotheca mathematica, Stockholm, pp. 4 in 8.°

1890. *Saggio di una biblioteca matematica italiana del secolo XIX.* Atti Ist. Sc. Bologna, Ser. IV, Tomo X, Bologna, pp. 17 in 4.°

1890. *Intorno al trattato di Prosdocimo di Beldomando sull' astrobolaio.* — Bibliotheca mathematica, Stockholm, pp. 2 in 8.°

1890. *De propositione novae bibliothecae mathematicae italicae seculi XIX* — Bibliotheca mathematica, Stockholm, p. 1 in 8.°

1891. *Commemorazione del prof. Felice Storchi.* — Mem. Acc. S. L. ed A. di Modena, Serie II, Tomo VIII, pp. 6 in 4.°

1892. *Su Gemignano Montanari.* — Raccolta omaggi a Galileo. Padova, pp. 2 in 4.°

1893. *Dall'Albo di frate Gabriele* (Nozze Vicini-Boni). — Modena, pp. 16 in 8.°

1893. — *Sopra un codice ebraico contenente alcuni scritti matematici ed astronomici.* — Bibliotheca mathematica, Stockholm, pp. 2 in 8.°

1893. *Ordine del giorno relativo alla distruzione minacciata della R. Università di Modena.* — Atti Accad. di Modena, Vol. IX, Modena, pp. 2 in 4.°

1893. *Nota dichiarativa dell' autografia di alcune piante antiche della città di Modena.* — Mem. Acc. S. L. ed A. in Modena, Vol. IX, pp. 7, con una tav. in 4.°

1893. *Sulla opportunità della proposta d' intitolare il nuovo osservatorio meteorologico del Cimone con il nome di Gemignano Montanari.* — Mem. Acc. S. L. ed A. di Modena, Serie II, Vol. IX, pp. 4 in 4.°

1893. *Osservazioni intorno alla nota del prof. A. Favaro sull' algebra del Bombelli.* — Bibliotheca mathematica, Stokholm, pp. 3 in 8.°

1894. *Intorno ad alcune edizioni dell'Algorismus del Sacrobosco.* — Bibliotheca mathematica, Stockholm, pp. 6 in 8.°

1894. *Lettere del prof. Giovanni Generali al tenente aiutante maggiore Francesco Riccardi a Milano (Nozze Ruffini Generali).* Modena, pp. 21 in 4.°

1894. *Aggiunta alla nota dichiarativa dell' autografia di alcune piante della città di Modena.* — Mem. Acc. S. L. ed A. in Modena, Ser. II, Vol. X, pp. 9 in 4.°

Digitized by Google

1895. *Preavviso di un programma di bibliografia modenese.* — Mem. Acc. S. L. ed A. in Modena, Ser. II, Vol. XI, pp. 6 in 4.°

1895. *Il sommario della Santa Scrittura. — Nota bibliografica modenese.* — Acc. S. L. ed A. in Modena, Ser. II, Vol. XI, pp. 13 in 4.°

1896. *Descrizione di una pianta di Modena.* — Mem. Acc. S. L. ed A. in Modena, Serie II, Vol. XII, pp. 2.

1896. *Il trattato del benefizio di Gesù Cristo. — Nota bibliografica modenese.* — Mem. Acc. S. L. ed A. in Modena, Ser. II, Vol. XII pp. 13 in 4.°

1897. *Contributo degli italiani alla storia delle scienze matematiche pure ed applicate — Saggio bibliografico.* — Atti Ist. Sc. Bologna, Ser. V, Vol. VI, pp. 20 in 4.°

1897. *Alcune lettere di Lagrange, di Laplace e di Lacroix dirette al matematico Pietro Paoli e sette lettere del Paoli al professore Paolo Ruffini.* — Mem. Acc. S. L. ed A. in Modena, Serie III, Vol. I, pp. 24 in 4.°

1898. *Note bibliografiche modenesi.* — Mem. Acc. S. L. ed A. in Modena, Ser. III, Vol. I, pp. 8 in 4.°

Oltre alle precedenti vanno rammentate molte comunicazioni che figurano in verbali accademici, ma o che non sono state pubblicate per esteso o sono state pubblicate con altro titolo o sono parti staccate di lavori maggiori.

PROGRAMMI E RIASSUNTI
DI CORSI UNIVERSITARI

UNIVERSITÀ DI ROMA. - CORSO DI GEOMETRIA ANALITICA E PROIETTIVA (*).

Introduzione alla Geometria Proiettiva.

Forme geometriche fondamentali - Elementi impropri (all'infinito) - Proposizioni grafiche fondamentali - Fondamento logico della legge di dualità nello spazio - Operazioni di proiezione e sezione - Proprietà proiettive delle figure; definizione della Geometria Proiettiva - Relazioni tra proprietà metriche e proprietà proiettive; come queste pos-

(*) Per rispondere alle domande di coloro che desiderano conoscere il piano su cui è architettato il Corso di Geometria analitica e projettiva, recentemente istituito per opera del Prof. Cremona, diamo posto a questo Programma, sicuri che i lettori ci approveranno per questa infrazione alle regole che ci imponemmo di non pubblicare che riassunti di lezioni appartenenti al II biennio universitario.
[G. L.]

Digitized by Google

sano dedursi da quelle (per proiezione), e come quelle rientrino in queste; due metodi per trattare la Geometria Proiettiva - Poligoni completi - Cenno sulla proiezione stereoscopica - Teorema dei triangoli omologici.

PARTE I.

Forme di prima specie.

Capitolo I. — *Sistemi di coordinate.* — I versi sulle forme di 1.ª specie; elementi che si succedono o si separano - Corrispondenza biunivoca e continua tra gli elementi della forma e i numeri reali (postulato di Dedekind); es. le ascisse sulla punteggiata - Concetto generale di sistema di coordinate; definizione della Geometria Analitica - Ascisse angolari, e coordinate tangenti nel fascio di rette o di piani - Rapporto semplice di tre elementi in una forma di prima specie - Espressioni aventi carattere proiettivo costruite mediante rapporti semplici - Teoremi di Menelao, Ceva, ecc. - Doppio rapporto - Coordinate proiettive - Gruppi armonici, costruzione mediante il quadrangolo o quadrilatero.

Capitolo II. — *Proiettività.* — Concetto generale di corrispondenza tra due forme della stessa specie - Corrispondenza proiettiva tra forme di 1.ª specie definita mediante la invariabilità del doppio rapporto - Definizione di Staudt - Costruzioni - Definizione analitica della proiettività - Proprietà metriche e casi particolari metrici - Il problema degli elementi uniti; determinazione analitica (introduzione degli elementi immaginari) e geometrica.

Capitolo III. — *Involuzione.* — Definizione sintetica e analitica - Costruzione mediante il quadrangolo completo - Elementi doppi; costruzione - Particolarità metriche - Classificazione dei problemi geometrici; condizione perchè un problema sia risolubile colla riga e col compasso - Problemi di secondo grado - Cenno sulla definizione sintetica degli immaginari secondo Staudt; es. punti ciclici del piano.

PARTE II.

Forme di seconda specie.

Capitolo I. — *Coordinate cartesiane nel piano.* — Definizione - Equazione di una retta - Relazioni di posizione tra punti e rotte - Formole metriche - Trasformazione delle coordinate - Coordinate polari.

Capitolo II. — *Rappresentazione analitica di una curva piana.* — Equazione di una curva - Curve trascendenti e algebriche; ordine -

Digitized by Google

Equazioni contenenti parametri; sistemi di curve; cenno sulle coordinate curvilinee nel piano - Curva rappresentata da più equazioni contenenti parametri - Esempi.

Capitolo III. — *Coordinate omogenee di punti e rette.* — Coordinate omogenee di punti (secondo Hesse) - Coordinate omogenee di rette - Trascrizione nelle nuove coordinate delle relazioni di posizione tra punti e rette - Fondamento analitico della legge di dualità piana - Equazione di un inviluppo di rette; classe - Tangente ad una curva, punto di contatto di un inviluppo.

Capitolo IV. — *Proiettività tra forme di seconda specie.* — Definizione (secondo Staudt) - Teorema fondamentale - Determinazione e costruzione - Equazioni - Particolarità metriche della collineazione tra piani - Omologia piana - Elementi uniti della collineazione tra forme sovrapposte - Correlazione polare; conica fondamentale.

PARTE III.

Curve di secondo ordine.

Capitolo I. — *Prime proprietà; costruzioni.* — Definizione analitica - Intersezioni con una retta; le tre specie di coniche - Cinque punti determinano una conica - Costruzione con fasci proiettivi, e costruzione duale - Teoremi di Pascal e Brianchon - Teorema di Desargues - Intersezioni di due coniche; fascio di coniche.

Capitolo II. — *Polarità.* — Intersezioni di una conica colla congiungente due punti - Equazione della tangente in un punto; tangenti da un punto - Punti coniugati; polo e polare - Polarità definita dalla conica - Equazione tangenziale; rette coniugate - Costruzioni di polo e polare - Triangoli autopolari - Coniche degeneri.

Capitolo III. — *Proprietà diametrali.* — Diametri; centro - Asintoti - Diametri coniugati - Assi (determinazione analitica e sintetica) - Caso particolare del cerchio - Equazioni ridotte di una conica; forma della curva dedotta dall'equazione - Riduzione della equazione generale mediante gli invarianti relativi alle trasformazioni di coordinate - Teoremi di Apollonio sui diametri coniugati.

Capitolo IV. — *Proprietà focali.* — Definizione dei fuochi mediante la involuzione di rette coniugate - Determinazione analitica e sintetica dei fuochi - Principali proprietà dedotte coll' uno o coll' altro metodo.

Capitolo V. — *Comportamento di una conica rispetto ad una collineazione.* — Modo di Stabilire una collineazione che muti una conica data in un' altra data - Coniche omologiche - Coniche affini - Coniche simili - Coniche omotetiche.

Digitized by Google

PARTE IV.

Forme di terza specie.

Capitolo I. — *Coordinate cartesiane nello spazio.* — Definizione; coordinate omogenee (con Hesse); in particolare, coordinate di una direzione - Equazione di un piano; equazioni di una retta (propria o impropria) - Relazioni di posizione tra punti, rette e piani - Formole metriche (in coordinate ortogonali) - Trasformazione delle coordinate - Coordinate polari.

Capitolo II. — *Equazioni di linee e superficie.* — Equazione di una superficie; equazioni di una linea - Equazioni parametriche di linee e superficie - Equazioni di coni, cilindri, superficie rotonde - Superficie algebriche; ordine.

Capitolo III. — *Coordinate di piani.* — Definizione - Fondamento analitico della legge di dualità nello spazio - Inviluppi semplicemente o doppiamente infiniti di piani.

Capitolo IV. — *Proiettività tra forme di terza specie.* — Definizione (secondo Staudt) - Costruzione - Equazioni - Casi particolari metrici della collineazione - Omologia solida - Elementi uniti della collineazione - Correlazione polare; quadrica fondamentale - Cenno sul sistema nullo.

PARTE V.

Superficie di secondo ordine.

Capitolo I. — *Proprietà fondamentali.* — Intersezioni con rette e piani - Piano tangente; punti ellittici, parabolici, iperbolici - Proprietà dei due sistemi di rette delle quadriche a punti iperbolici.

Capitolo II. — *Polarità.* — Equazione del piano tangente - Punti coniugati; polo e piano polare - Equazione tangenziale della quadrica - Figure autoconiugate - Quadriche degeneri.

Capitolo III. — *Proprietà metriche.* — Intersezione col piano all'infinito; varie specie di quadriche - Piani diametrali - Centro, diametri - Cono asintoto - Coppie e terne di piani diametrali coniugati - Trattazione analitica del problema degli assi - Quadriche rotonde, sfera - Equazioni ridotte - Forma delle quadriche dedotta dalle dette equazioni - Riduzione delle equazioni mediante gli invarianti relativi alle trasformazioni di coordinate - Classificazione dedotta dai segni dei nominati invarianti - Cenno sulle sezioni circolari.

G. Castelnuovo.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1899.

Digitized by Google

APRILE, MAGGIO E GIUGNO 1899.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*. Università di Genova.

SOMMARIO

R. BONOLA, *Bibliografia sui fondamenti della Geometria in relazione alla geometria Non-Euclidea.*

Recensioni ed annunzi: R. FRICKE *und* F. KLEIN. *Vorles. über die Theorie der automorphen Functionen*, I [G. Vivanti]. — M. CANTOR. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, III, 3 [G. L.]. — *Verh. des I intern. Mathem. - Kongresses* [G. L.]. — H. ANDOYER. *Leçons élém. sur la théorie des formes* [G. L.]. — P. MANSION. *Mélanges mathématiques* [G. L.]. — C. NEUMANN. *Allg. Unters. über das Newton'sche Princip.* [P. Pizzetti]. — BURKHARDT *und* MEYER. *Encyklopädie der mathem. Wissenschaften*, I, 1 e 2 [G. L.]. — A. CAPELLI. *Lezioni di algebra complementare* [G. L.] — *Annuaire du Bureau des Longitudes* [G. L.].

Necrologio: *Sophus Lie* [C. Segre]. *Elenco delle pubblicazioni di S. Lie.*

Programmi e riassunti di corsi universitarii: *Università di Bologna. Corso di Geometria superiore*, 1897-98 [Prof. F. Enriques].

Notizie: *I premi dell' Istituto di Francia. — Dizionario biografico degli scrittori italiani. — Tema di matematica posto a concorso dall'Accad. di Madrid. — Modelli di matematica. — L'enseignement mathématique.*

BIBLIOGRAFIA
sui Fondamenti della Geometria in relazione alla Geometria Non-Euclidea

compilata da ROBERTO BONOLA

(Continuazione. Vedi pag. 10).

INDIRIZZO METRICO-DIFFERENZIALE.

L'indirizzo metrico-differenziale, il secondo che si svolge in linea storica, è fondato da B. Riemann (1854). Definita la varietà a più dimensioni (vedi anche Grassmann) e datene la costruzione e la rappresentazione analitica (alla quale ultima si riattaccano gli studi di Cantor, Netto, Enriques, Burkhardt), Riemann stabilisce in essa una determinazione metrica, assegnando come espressione del ds^2 (quadrato dell'elemento d'arco) una funzione omogenea di secondo grado nei differenziali delle variabili. Fra le infinite varietà, che in tal guisa vengono in considerazione, studia in particolar modo quelle in cui le misure

Digitized by Google

risultano indipendenti dalla posizione in cui esse sono effettuate, varietà che egli riesce a caratterizzare a mezzo della *costanza nella curvatura*, e che corrispondono alle tre note forme spaziali.

Successivamente gli studi di Beltrami e Schläfli pongono in evidenza il carattere proiettivo delle varietà a curvatura costante, rispetto alle loro geodetiche: gli studi di Christoffel e Lipschitz, sulla teoria generale delle forme differenziali omogenee, servono a stabilire (in particolare) i risultati contenuti nella dissertazione di Riemann, ai quali, in seguito, perviene anche lo Schur, per via più diretta e più sintetica.

I lavori annoverati in questo paragrafo si riferiscono quindi allo sviluppo dei concetti riemanniani, al loro proseguimento e completamento ed in particolar modo alla ricerca delle più interessanti proposizioni sulle varietà a curvatura costante ed al problema (scaturito da alcune brevi considerazioni di Clifford) della determinazione di tutte le possibili forme spaziali a curvatura costante (Klein, Killing). I lavori del Poincaré, del Klein ecc. sui gruppi fuchsiani e sulla teoria generale delle funzioni automorfe, intimamente collegati a quest'ultimo problema, sono tuttavia stati ommessi, perchè spettanti all'analisi.

Bäcklund. — *Om ytar med konstant negativ kröknig, avec un Résumé en français.* (Lunds Universitets Aarschrift XIX, 1884).

Banal R. — *Sugli spazi a curvatura costante.* (Lincei, Atti, (5), VI, 1897).

Bang. — *Nogle Maximumsproblemer i den ikke euklidiske Geometri.* (Tidsskrift for Mathematik, (5), V, 1887).

Beez R. — *Ueber conforme Abbildung von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung* (Zeit. für Math. XX, 1874).

Id. *Ueber das Krümmungsmaasse von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.* (Math. Ann. VII, 1874).

Id. *Zur Theorie des Krümmungsmaasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.* (Zeit. für Math. XX, 1875).

Id. *Zur Theorie des Krümmungsmaasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.* (Zeit für Math. XXI, 1876, XXIV, 1879).

Id. *Ueber euklidische und nicht-euklidische Geometrie.* (Plauen, 1888).

Beltrami E. — *Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da rette.* (Ann. Mat. (1), VII, 1866).

Id. *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea.* (Giorn. mat. VI, 1868. Trad. francese, Ann. Éc. norm. VI, 1869).

Id. *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante.* (Ann. Mat. (2), II, 1868. Trad. francese, Ann, Éc. norm., VI, 1869).

Digitized by Google

BELTRAMI E. — *Osservazione alla precedente nota del Sig. Prof. Schläfli* (Ann. Mat. (2), V, 1870).

Id. *Teorema di geometria pseudosferica.* (Giorn. mat. X, 1872).

Id. *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche.* (Giorn. Mat. X, 1872).

BIANCHI L. — *Sull'applicabilità delle superficie negli spazi a curvatura costante* (Lincei, Mem. (3), II, 1878).

Id. *Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi.* (Annali della scuola norm. sup. di Pisa, II, 1879).

Id. *Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung.* (Math. Ann. XVI, 1880).

Id. *Sulle superficie a curvatura costante positiva.* (Giorn. Mat. XX, 1882).

Id. *Sui sistemi di Weingarten negli spazi di curvatura costante.* (Lincei, Mem. (4), IV, 1887).

Id. *Sulle forme quadratiche differenziali definite.* (Lincei, Mem. (4), V, 1888).

Id *Sulle divisioni regolari dello spazio non euclideo in poliedri regolari.* (Lincei, Mem. (5), II, 1893).

Id. *Lezioni di geometria differenziale.* (Pisa, Spoerri, Cap. 2, Cap. 12, 1894).

Id. *Applicazioni geometriche del metodo delle approssimazioni successive del Picard.* (Lincei, Rend. V, 1894).

Id. *Sulle superficie a curvatura nulla, negli spazi a curvatura costante.* (Torino, Atti, XXV, 1894-95).

Id. *Sulle superficie a curvatura nulla, in geometria ellittica.* (Ann. Mat. (2), XXIX, 1895).

Id. *Sugli spazi a tre dimensioni, che ammettono un gruppo continuo di movimenti.* (Mem. Soc. XL, (3), XI, 1897).

Id. *Alcune ricerche di geometria non euclidea.* (Ann. Mat. (3), II, 1898).

BRILL. — *Bemerkung über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen.* (Math. Ann. XXVI).

BURKHARDT H. — *Beiträge zu den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.* (Gött. Nachr. 1895).

CALINON A. — *La géometrie à deux dimensions des surfaces à courbure constante.* (Paris, Gauthier-Villars, 1895).

CANTOR G. — *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* (Crelle, LXXXIV, 1877).

Id. *Contribution à la théorie des ensembles.* (Acta Mat., II, 1881).

Id. *Sur les ensembles finis et linéaires de point.* (Acta Math., II, 1881).

Id. *Fondements d'une théorie générale des ensembles.* (Acta Math., II, 1881).

Digitized by Google

CANTOR G. — *Sur divers théorems des ensembles de points situés duns un espace à n dimensions.* (Acta Math., II, 1881).

CAYLEY A. — *Sur les surfaces minima.* (Comptes Rendus, CXI, 1890).

CESÀRO E. — *Sulla geometria intrinsica degli spazi curvi.* (Mem. Napoli, (2), VI, 1894).

Id. *Sulle deformazioni infinitesime negli iperspazi.* (Nap. Rend. (2), IX, 1895).

CHRISTOFFEL E. — *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.* (Crelle, LXX, 1869).

Id. *Ueber ein die Transformation homogenen Differentialausdrücke betreffendes Theorem.* (Crelle, LXX, 1869).

CODAZZI D. — *Intorno alle superficie le quali hanno costante il prodotto de' due raggi di curvatura.* (Tortolini, Ann. VIII, 1857).

DARBOUX G. — *Sur la surface dont la curbure totale est constante.* (Comptes Rendus, XCVII, 1883).

DOBRINER. — *Die Flächen constanter Krümmung mit einer Schaar sphärischer Krümmungslinien dargestellt mit Hilfe von θ Functionen zweier Variabeln.* (Dissertazione, Marburg, 1886. Acta Math., IX, 1886-87).

ENRIQUES E. — *Conferenze di Geometria.* (Bologna, Lezioni litografate, 1894).

Id. *Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni.* (Palermo, Rend., XII, 1898).

ENNEPER. — *Bemerkungen ueber einige Flächen mit constantem Krümmungsmaass.* (Gott. Nachr. 1876).

ESCHERICH. — *Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung.* (Sitzungsberichte der Math-naturw. Kais. Acad. LXIX. Wien, 1875).

FIBBI C. — *I sistemi doppiamente infiniti di raggi, negli spazi di curvatura costante.* (Annali Scuola Normale Pisa, 1891).

FRANKLAND W. — *On the simplest continuous manifoldness of two dimensions and of finite extent.* (Proc. L. M. S. VII, 1877. Nature, XV, 1877).

GAUSS C. F. — *Disquisitiones generales circa superficies curvas.* (Comment. recent. Soc. Gott. T. VI, 1827; Werke, Bd. IV, 1873).

GUICHARD. — *Recherches sur les surfaces à curbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent.* (Ann. Éc. norm. (3), VII, 1890).

HAZZIDAKIS. — *Ueber einige Eigenschaften der Flächen von constantem Krümmungsmaass.* (Crelle, LXXXVIII, 1879).

KAGAN H. — *Démostration nouvelle des équations fondamentales de la géométrie de l'espace de courbure constante négative.* (Nouv. Ann., (3), XIV, 1895).

Digitized by Google

KAHAN V. — *Elementi della geometria analitica della superficie a curvatura costante negativa.* (In russo. Bollettino della società fisico-matematica di Kasan (2), V, 1895-96).

KILLING W. — *Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung.* (Crelle, LXXXVI, 1878).

Id. *Ueber einige Bedenken gegen die Nicht-Euklidische Geometrie.* (Hoffmann Zeits. VII, 1879).

Id. *Ueber die Nicht-Euklidischen Raumformen.* (Crelle, XCI, 1880).

Id. *Ueber die Nicht-Euklidischen Raumformen. von n Dimensionen.* (Braunsberg, 1880).

Id. *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analyticher Behandlung.* (Leipzig, Teubner, 1885).

Id. *Ueber die Clifford-Klein'schen Raumformen.* (Math. Ann. XXXIX, 1891).

Id. *Ueber die Grundlagen der Geometrie.* (Crelle, CIX, 1892).

Id. *Einführung in die Grundlagen der Geometrie.* (Paderborn, Schöningh; I Bd., 1893; II Bd., 1898).

KLEIN F. — *Liniengeometrie und metrische Geometrie.* (Math. Ann. V, 1872).

Id *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* (Math. Ann., VI, 1873).

Id. *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie.* (Math. Ann., XXXVII, 1890).

Id. *Vorlesungen ueber die Nicht-Euklidische Geometrie.* (Lezioni litografate. Gottingen, 1889-90; 2.ª ed., 1893).

KRONECKER. — *Ueber Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln.* (Berliner Ber. 1869).

LIE S. — *Zur Theorie eines Raumes von n Dimensionen* (Gött. Nach., 1871).

Id. *Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungstheorie des gewöhnlichen Raumes entspricht.* (Gott. Nachr., 1871).

Id. *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung.* — (Lie Arch. IV, 1879; V, 1880).

Id. *Ueber Riemanns Habilitationsrede.* (Transformationsgruppen, Bd. III, Kap. 20, § 100).

LIPSCHITZ R. — *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen.* (Crelle, LXX, 1869).

Id. *Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratichen Formen von n Differentialen.* (Crelle, LXXI, 1870).

Id. *Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen.* (Crelle, LXXII, 1870).

Id. *Extension of the Planete-problem to a space of n dimension and of constant integral curvature.* (Quarterly Jour., XII, 1871).

Digitized by Google

LIPSCHITZ R. — *Untersuchungen eines Problems der Variationsrechnung.* (Crelle, LXXIV, 1872).

Id. *Entwickelung eines Zusammenhanges zwischen den quadratischen Formen von n Differentialen und den Abelschen Trascendenten.* (Crelle, LXXIV, 1872).

Id. *Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen.* (Crelle, LXXVIII, 1874).

Id. *Beitrag zur Theorie der Krümmung.* (Crelle, LXXXI, 1876).

Id. *Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface.* (Comptes Rendus, LXXXII, 1876; Crelle, LXXXI, 1876).

Id. *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhaltnisse betreffenden Eigenschaften.* (Berliner Ber., 1882).

LORIA G. — *La definizione di spazio a* n *dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di Giorgio Cantor.* (Giorn. Mat., XXV, 1887).

LÜROTH J. — *Verallgemeinerung des Problems der kürzesten Linie.* (Zeit. für Math., XIV, 1868).

MONRO C. — *Flexure of Space.* (Proc. L. M. S., IX, 1878).

NETTO E. — *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* (Crelle, LXXXVI, 1878).

PEANO G. — *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane.* (Math. Ann., XXXVI, 1890).

REINA V. — *Sugli orcicli delle superficie pseudosferiche.* (Lincei, Rend. (4), 5, 1889).

RIEMANN B. — *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen.* (1854). (Gött. Abhandl. XIII, 1868; Riemann's Werke. Leipzig, 1876; II ed. 1892. Trad. franc. di Hoüel, Ann. Mat. (2), III e *Oeuvres mathématiques de Riemann*, trad. Laugel, Paris, 1898; Trad. inglese di Clifford, Nature VIII, 1873; oppure *Mathematical Papers* di Clifford).

Id. *Commentatio mathematica* etc. (Riemann's Werke. Leipzig, 1876 e 1892).

SCHLÄFLI L. — *Nota alla memoria del Sig. Beltrami « Sugli spazi di curvatura costante ».* (Ann. Mat. (2), V, 1870).

SCHERING E. — *Linien, Flächen und höhere Gebilde im mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Raume.* (Gött. Nachr. 1873).

SCHUR F. — *Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses.* (Mat. Ann., XXVII, 1886).

Id. *Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen.* (Math. Ann. XXVII, 1886).

Digitized by Google

SIMON P. — *Ueber Flächen mit constantem Krümmungsmaass.* (Dissertazione, Halle, 1876).

SUWOROFF. — *Sulle caratteristiche dei sistemi a tre dimensioni.* (In russo. Kasan, 1871. Un resoconto abbastanza esteso si trova nel Bull. Sc. Math., IV, 1873).

VOSS A. — *Zur Theorie des Riemann'schen Krümmungsmasses.* (Math. Ann. XVI, 1880).

Id. *Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten.* (Math. Ann., XVI, 1880).

Id. *Ueber ein Princip der Abbildung krummer Oberflächen.* (Math. Ann., XIX, 1882).

WEINGARTEN. — *Ueber die Eigenschaften des Linienelements der Flächen von constantem Krümmungsmaass.* (Crelle, XCIV e XCV, 1883).

INDIRIZZO GRUPPALE.

L'indirizzo gruppale, iniziato da H. Helmholtz (1866) ed in parte preceduto da Ueberweg (1851), ha per iscopo di caratterizzare le proprietà metriche dello spazio analitico (x, y, z) a mezzo di una funzione

$$\Omega\,(x_0\ y_0\ z_0;\ x_1\ y_1\ z_1)$$

della coppia di punti (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), detta distanza, che rimane inalterata in tutti i *movimenti* (i quali, secondo il Lie, formano un gruppo di trasformazioni). Le proprietà dei movimenti, introdotte a mezzo d'un conveniente sistema di postulati (Helmholtz), conducono al teorema di Pitagora generalizzato, cioè all'espressione della distanza, quando i due punti sono infinitamente vicini, espressione che coincide col ds^2 dato da Riemann, per le varietà a curvatura costante.

Ai lavori di Helmholtz si riattaccano in primo luogo quelli del Lie nei quali, ripresa la questione coi metodi gruppali, vengono precisati e completati i lavori precedenti e proposte due nuove soluzioni al problema (denominato dal Lie) di Riemann-Helmholtz, una delle quali si giova delle sole proprietà che definiscono un gruppo nell'infinitesimo, l'altra delle proprietà che definiscono un gruppo nel finito; successivamente quelli del Poincaré, limitatamente al caso delle due dimensioni; in fine quelli di Bianchi relativi alle varietà, che ammettono un gruppo continuo di movimenti.

Le pubblicazioni qui annoverate si riferiscono dunque ai lavori dei geometri sopra nominati ed a rifacimenti e generalizzazione delle teorie da essi esposte.

Digitized by Google

BIANCHI L. — *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.* (Mem. Soc. XL, (3), XI, 1897).

HELMHOLTZ H. — *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie.* (Heidelberg. Verhandl. Nat. Med. IV, 1866; Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. 2, Leipzig 1883; Trad. francese di Hoüel, Bordeaux, Mém. V, 1868; Paris, Hermann, 1895).

Id. *Ueber die Tatsachen welche der Geometrie zu Grunde liegen.* (Gött., Nachr. 1868; Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. 2, Leipzig).

KILLING W. — *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* (Ved. Killing, Indirizzo differenziale).

KLEIN F. — *Vergleichende Betrachtungen ueber neuere geometrische Forschungen.* (Erlangen, 1872; Math. Ann., XLIII; Trad. italiana di G. Fano, Ann. Mat. (2), XVII; Trad. francese, Ann. Éc. nor. (3), VIII).

Id. *Ueber die sogenannten Nicht-Euklidische Geometrie.* (Math. Ann. VI, 1873).

Id. *Höhere Geometrie.* (Lezioni litografate, Bd. 2, Göttingen, 1893).

LIE S. — *Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen welche der Geometrie zu Grunde liegen.* (Leipz. Ber. XXXVII, 1886).

Id. *Ueber die Grundlagen der Geometrie.* (Leipz. Ber. XLII, 1890).

Id. *Bemerkungen über die Grundlagen der Geometrie.* (Leipz. Ber. XLIV, 1892).

Id. *Sur les fondements de la Géométrie.* (Comptes Rendus, CIV, 1892).

Id. *Theorie der Transformationsgruppen.* (Bd. 3, Leipzig, Teubner, 1893).

POINCARÉ H. — *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie.* (Bull. S. M. F., XV, 1887).

ÜBERWEG. — *Die Principen der Geometrie.* (Archiv für Philologie und Padagogik, XVII, 1851).

RECENSIONI ED ANNUNZI

R. FRICKE *und* F. KLEIN. — *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen.* Erster Band: *Die gruppentheoretischen Grundlagen.* Leipzig, Teubner, 1897. p. XIV-634. 8.°

Il volume che ci sta dinanzi contiene la prima parte d'un'opera. destinata a formare la continuazione delle *Vorlesungen über das Ikosaeder* di Klein, e delle *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modul-*

Digitized by Google

functionen di Klein e Fricke. Da questo suo doppio carattere, da una parte di opera incompleta, dall'altra di continuazione d'altre opere, nasce, per chi si accinge a farne la recensione, una doppia difficoltà; una difficoltà intrinseca, quella di determinare e riconoscere l'importanza relativa di teorie di cui ancora non si vede l'applicazione all'argomento principale, una estrinseca, quella di evitare i troppo frequenti richiami alle opere precedenti, di cui non si può presumere la conoscenza in tutti i lettori. Questa osservazione valga a giustificarci se la nostra recensione potrà sembrare troppo strettamente analitica ed obiettiva, e se qualche volta — benchè il più parcamente possibile — ci avverrà di uscire dall'ambito del volume che stiamo esaminando per fare qualche escursione nel campo della teoria dell'icosaedro o delle funzioni modulari. Per quanto ciò possa parere strano, una prima escursione ci sarà necessaria per sapere che cosa siano le *funzioni automorfe*. Come leggiamo a p. 763 del T. I delle *Modulfunctionen*, si designano con tal nome le funzioni che ammettono sostituzioni lineari le quali le mutano in sè stesse.

Il nuovo e poderoso volume che ci presenta l'instancabile attività di R. Fricke consta di una introduzione e di tre parti; ciascuna di queste ultime si divide in tre capitoli.

L'*Introduzione* tratta dei concetti di misura dal punto di vista proiettivo. Date le definizioni di *assoluto*, *distanza*, *angolo*, e distinte le tre metriche, *ellittica*, *parabolica*, e *iperbolica*, si imprendono a studiare le trasformazioni che mutano in sè stesso il piano parabolico. Esse sono: in primo luogo, i movimenti del piano su sè stesso (*trasformazioni di prima specie*), i quali formano un gruppo continuo; poi le conbinazioni di questi con un ribaltamento intorno ad una retta del piano (*trasformazioni di seconda specie*). Rispetto a tutte queste trasformazioni, distanze ed angoli sono invarianti.

I punti reali del piano, anzichè dalle 3 coordinate omogenee z_1, z_2, z_3, possono essere individuati dall'unica variabile complessa:

$$\zeta = \frac{z_1 + i z_2}{z_3};$$

indicando con $\overline{\zeta}$ la quantità coniugata di ζ, le $\zeta, \overline{\zeta}$ possono considerarsi come i parametri dei raggi che proiettano il punto (z_1, z_2, z_3) dai punti ciclici. Questo suggerisce l'idea di rappresentare qualunque punto, *reale* o *complesso*, del piano mediante i parametri $\zeta, \overline{\zeta}$ dei raggi che lo proiettano dai punti ciclici. Le $\zeta, \overline{\zeta}$ sono legate alle coordinate omogenee dalle relazioni:

$$z_1 : z_2 : z_3 = (\zeta + \overline{\zeta}) : i(\overline{\zeta} - \zeta) : 2;$$

esse sono coniugate se il punto è reale.

Digitized by Google

Alle trasformazioni di I specie corrispondono le sostituzioni del parametro ζ della forma:

$$\zeta' = e^{i\theta}\zeta + c, \tag{1}$$

a quelle di 2ª specie le combinazioni di queste colla:

$$\zeta' = -\overline{\zeta}. \tag{2}$$

Risalendo alle coordinate omogenee, e ponendo $c = a + bi$, si hanno dalla (1) le note formole:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1 \cos\theta - z_2 \operatorname{sen}\theta + a z_3 \\ z_2' &= z_1 \operatorname{sen}\theta + z_2 \cos\theta + b z_3 \\ z_3' &= z_3, \end{aligned}$$

che rappresentano una collineazione la quale lascia immutato ciascuno dei punti ciclici; dalla (2) le:

$$z_1' = z_1, z_2' = -z_2, z_3' = -z_3,$$

che rappresentano una collineazione la quale scambia i punti ciclici tra loro.

Volendo estendere le considerazioni fatte al piano iperbolico od ellittico, e ricordando che l'assoluto del piano parabolico è costituito dai due punti ciclici, può osservarsi anzitutto che le trasformazioni del piano iperbolico od ellittico in sè stesso sono collineazioni reali che lasciano invariato l'assoluto. Il gruppo da queste formato consta di un solo insieme continuo oppure di due, secondochè si tratta del caso ellittico o del caso iperbolico. Così il problema della ricerca di tutte le trasformazioni considerate si riduce a quello della determinazione di tutte le collineazioni reali che mutano in sè stessa una conica. A tali collineazioni corrispondono trasformazioni lineari d'un parametro ζ convenientemente scelto a rappresentare il punto variabile della conica; è facile poi determinare sotto quali condizioni una collineazione sia reale. Dopo ciò a ciascun punto reale, o complesso, del piano possono farsi corrispondere i parametri ζ, $\overline{\zeta}$ dei punti di contatto delle tangenti da esso condotte all'assoluto. Presa in particolare nel piano iperbolico come assoluto un'ellisse, i parametri d'un punto reale del piano sono complessi coniugati, reali e distinti o reali e coincidenti, secondochè il punto sta dentro, fuori o sopra l'ellisse. Può quindi stabilirsi una corrispondenza biunivoca tra i punti interni all'ellisse e i punti del semipiano della variabile complessa ζ superiore all'asse reale, corrispondenza che può effettuarsi geometricamente mediante la successione d'una proiezione stereografica (da cui si ha un'imagine sferica) e di una ortografica.

Digitized by Google

Una proprietà notevole di tale corrispondenza è che le imagini nel piano iperbolico dei semicerchi del piano ζ aventi il centro sull'asse reale sono rette.

Ciò posto, alle trasformazioni del piano iperbolico in sè stesso (collineazioni reali che lasciano invariata l'ellisse assoluto) corrispondono in ζ sostituzioni della forma:

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta'}, \qquad (3)$$

dove α, β, γ, δ sono numeri reali, e $\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0$ secondochè si tratta d'una trasformazione di I o di II specie.

Partendo dall'imagine ζ, si possono facilmente costruire nel piano iperbolico le traiettorie e le linee di livello delle singole sostituzioni, che, come è noto, possono essere *ellittiche*, *paraboliche*, o *iperboliche*.

Uno studio analogo può farsi pel piano ellittico.

Conviene ora estendere alcune delle cose dette allo spazio. Considerando soltanto lo spazio iperbolico, cioè avente per assoluto una quadrica reale, e presa come tale la sfera:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

dove X, Y, Z sono le coordinate cartesiane dei punti dello spazio, si può individuare un punto reale (X, Y, Z) interno ad essa mediante i tre parametri reali:

$$\xi = \frac{X}{1 - Z}, \quad \eta = \frac{Y}{1 - Z}, \quad \theta = \frac{+\sqrt{1 - X^2 - Y^2 - Z^2}}{1 - Z},$$

oppure mediante i tre parametri $\xi, \eta, r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \theta^2 = \frac{1 + Z}{1 - Z}$. Posto $\xi + i\eta = \zeta$, e considerando ξ, η, θ come coordinate cartesiane del *semispazio positivo* ζ, si ha una imagine dello spazio interno alla sfera in questo semispazio; alla superficie della sfera corrisponde il piano ζ; alle trasformazioni in sè stesso dello spazio iperbolico che lasciano invariato l'assoluto corrispondono trasformazioni lineari delle coordinate $r^2, \zeta, \bar{\zeta}$ ($\bar{\zeta}$ è il coniugato di ζ) che lasciano invariato il piano ζ, e in particolare alle trasformazioni dei punti della sfera corrispondono sostituzioni lineari della forma (3), dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono complessi.

Tornando alle sostituzioni (3) a coefficienti reali, le quali lasciano invariato l'asse reale del piano ζ, è da osservarsi che si può, in modo noto, far figurare al posto di questo asse un cerchio qualunque del piano. In luogo del semipiano positivo compare allora la parte di piano interna al cerchio, e le sostituzioni corrispondentemente trasformate hanno la proprietà di lasciare immutato il cerchio stesso, il quale prende il nome di *cerchio principale*. Questa proprietà di mutare in

Digitized by Google

sè stesso un cerchio non appartiene in generale a tutte le (3) a coefficienti complessi; e v'ha quindi luogo a distinguere tra *sostituzioni a cerchio principale* e *sostituzioni senza cerchio principale*.

La *Parte prima* è dedicata ai fondamenti della teoria dei gruppi discontinui.

Nel *Cap. I* si comincia a definire la *discontinuità* d'un gruppo; la sua caratteristica è l'assenza di parametri continuamente variabili nei coefficienti delle sostituzioni. Detti *equivalenti* due punti della varietà rappresentativa pei quali esiste una sostituzione del gruppo che permette di passare dall'uno all'altro di essi, si chiama *campo fondamentale* o *di discontinuità* un campo contenente uno ed un sol punto equivalente a ciascun punto della varietà. Se il campo di discontinuità ha lo stesso numero di dimensioni della varietà considerata, il gruppo si dice *propriamente discontinuo* in quella varietà.

Il campo di discontinuità d'un gruppo di I *specie* (cioè composto di sole sostituzioni di I specie) in una varietà a 2 dimensioni ha due proprietà caratteristiche: che quelli dei suoi lati i quali non fanno parte del contorno della varietà (asse reale pel semipiano ζ, ellisse pel piano iperbolico, ecc.) sono equivalenti due a due (ed hanno, in senso proiettivo, la stessa lunghezza), per modo che di 2 lati corrispondenti uno solo deve considerarsi come appartenente al campo di discontinuità; e che la forma di uno dei lati di ciascuna di tali coppie è in gran parte arbitraria.

Facile a costruirsi è il campo di discontinuità d'un gruppo ciclico nel piano ζ, ed altrettanto facile è trovarne l'imagine nel piano iperbolico; tale imagine ha per contorno archi dell'ellisse assoluto e segmenti rettilinei uscenti dal punto fisso della sostituzione generatrice, punto che sta dentro, fuori o sopra l'ellisse, secondochè la sostituzione è ellittica, iperbolica o parabolica.

Lo stesso problema può risolversi senza difficoltà pei gruppi dei corpi regolari, e pel *gruppo modulare*, il quale è l'insieme delle sostituzioni (3) in cui $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono interi e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. In tutti questi casi s'ottengono come campi di discontinuità nel piano iperbolico delle figure rettilinee.

Infine si passa allo studio del *gruppo di Picard*, cioè del gruppo Γ di tutte le sostituzioni (3) in cui $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono numeri interi complessi tali che $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ o $= i$. Mediante combinazione colla sostituzione (2) si deduce da esso il *gruppo ampliato* $\overline{\Gamma}$, il quale contiene infinite *riflessioni* (*Spiegelungen*) rispetto a cerchi reali (*cerchi di simmetria*). Il sistema di trasformazioni del piano ζ in sè stesso che è imagine del gruppo considerato può ritenersi collegato ad un sistema, che indichiamo ancora con $\overline{\Gamma}$, di trasformazioni del semispazio ζ in sè stesso che lascia invariato il piano ζ. Tale sistema comprende una

Digitized by Google

infinità di riflessioni rispetto a semisfere (*di simmetria*) taglianti ortogonalmente il piano ζ lungo i già menzionati cerchi di simmetria. Da queste semisfere (alcune delle quali si riducono a piani) il semispazio ζ è diviso in infiniti tetraedri piano-sferici, e si dimostra che tale divisione si muta in sè stessa per qualunque operazione del sistema $\overline{\Gamma}$. Uno di questi tetraedri può assumersi come campo di discontinuità pel gruppo $\overline{\Gamma}$, il quale è propriamente discontinuo nel semispazio ζ ma non nel piano ζ. Due tetraedri opportunamente riuniti formano il campo di discontinuità del sistema, che può designarsi con Γ, dal quale $\overline{\Gamma}$ risulta per ampliamento.

La divisione corrispondente dello spazio iperbolico risulta a facce tutte piane.

Nel *Cap. II* il concetto di discontinuità viene considerato sotto un altro punto di vista. Si dimostra che un gruppo propriamente discontinuo nel piano ζ o nel semispazio ζ non contiene trasformazioni infinitesime, e reciprocamente che ogni gruppo senza trasformazioni infinitesime è propriamente discontinuo nel piano ζ od almeno nel semispazio ζ.

Secondochè un gruppo è propriamente discontinuo nel piano ζ o solo nel semispazio ζ, esso dicesi *poligonale* o *poliedrico*.

La già accennata arbitrarietà della forma del contorno d'un campo fondamentale rende possibile di scegliere questo nel modo il più appropriato all'ulteriore sviluppo della teoria; si ha così, nel piano proiettivo, il *campo normale di discontinuità*, il quale ha la proprietà di avere il contorno rettilineo e gli angoli concavi, e di essere semplicemente connesso. Quelli tra i suoi vertici, che non sono punti fissi di alcuna sostituzione del gruppo, diconsi *vertici generici* (*zufällige Ecken*); essi si dividono in *cicli*, di cui ciascuno ne contiene 3, ed eccezionalmente un numero maggiore. I vertici d'un *ciclo* sono equidistanti (in senso proiettivo) da un certo punto, che dicesi *centro* del poligono; i lati che partono da questi vertici sono due a due omologhi, e la somma degli angoli (sempre in senso proiettivo) è 2π. In un vertice fisso ellittico (cioè che è punto fisso d'una sostituzione ellittica del gruppo) l'angolo è un sottomultiplo di 2π e i due lati sono omologhi. I vertici parabolici giacciono, nel caso del piano iperbolico, sull'ellisse; in essi l'angolo è nullo e i lati sono omologhi. Vertici iperbolici non possono esistere nel poligono normale.

Analogamente possono definirsi i *poliedri normali* dello spazio iperbolico; in questo caso, quando il gruppo è propriamente discontinuo anche sulla sfera assoluto, v'ha luogo a studiare il sistema di poligoni determinato sulla sfera dalla divisione normale dello spazio.

Segue lo studio dei campi di discontinuità normali dei gruppi *misti* (cioè contenenti anche operazioni di II specie).

Digitized by Google

Il *Cap. III* continua a trattare dei gruppi discontinui. Partendo nuovamente dalla premessa, che la forma del campo di discontinuità d'un gruppo di I specie è in parte arbitraria, si esamina quali sieno le *variazioni lecite* nella forma d'un tal campo, e quali le proprietà fondamentali o, come potrebbe anche dirsi, *invariantive* di esso. Dopo di ciò si cerca di definire e di generare un gruppo senza sostituzioni infinitesime partendo dal suo campo di discontinuità che si suppone dato; e si dimostra che qualunque poligono o poliedro avente le proprietà caratteristiche testè accennate dà luogo ad un gruppo (*teorema d'esistenza*).

La forma del campo di discontinuità serve di base ad una classificazione dei gruppi propriamente discontinui, classificazione che gli autori espongono in forma di tabella, e che porge loro occasione di richiamare e criticare le idee di Poincaré sull'argomento.

I lati del poligono generatore d'un gruppo di 1.ª specie del piano iperbolico che non sono archi dell'ellisse assoluto sono, come dicemmo, due a due omologhi. Le sostituzioni, mediante le quali si passa dall'uno all'altro lato delle varie coppie, possono assumersi come *sostituzioni generatrici* del gruppo, giacchè ogni sostituzione di questo può mettersi sotto forma d'un prodotto di tali sostituzioni. Generalmente questa rappresentazione può farsi in più modi; o, ciò che è lo stesso, tra le sostituzioni generatrici esistono certe relazioni. Queste si deducono dall'esame dei lati che sono incontrati successivamente da curve chiuse comprendenti un solo vertice del poligono; il loro numero è eguale al numero dei cicli formati dai vertici del poligono interni all'ellisse. Considerazioni analoghe possono farsi per gruppi qualunque; soltanto, siccome la rete dei poligoni può non essere semplicemente connessa, anzi presentare infinite lacune, oltre alle relazioni ottenute come nel caso precedente (*relazioni primarie*), se ne possono dedurre altre (*relazioni secondarie*) da curve chiuse contenenti un'infinità di lacune.

Sia P_0 il poligono generatore d'un gruppo di I specie. Ripiegandolo in modo che le coppie di lati omologhi coincidano, si ottiene una superficie chiusa F; essa è invariante rispetto a qualunque variazione lecita di P_0, e si ottiene da essa nuovamente il poligono praticandovi (come si suol fare nell'*Analysis situs*) un opportuno sistema di tagli che la renda semplicemente connessa.

Se invece P_0 è il poligono generatore d'un gruppo misto, esso avrà almeno un lato non appartenente ad alcuna coppia di lati omologhi; indicando con $\overline{P_0}$ il poligono contiguo a P_0 lungo quel lato, i poligoni $P_0, \overline{P_0}$ presi insieme costituiscono il poligono generatore P_0' d'un gruppo di 1.ª specie. La superficie chiusa F' in cui può convertirsi P_0' sarà una *superficie simmetrica* — nel senso dato a questa denomi-

Digitized by Google

nazione da Klein — e il lato comune a P_0, $\overline{P_0}$ diverrà una *linea di simmetria*.

Se nella superficie F ottenuta dal poligono generatore P_0 d'un gruppo di 1.ª specie si pratica un sistema *canonico* di tagli, quali sono quelli che figurano nella teoria delle superficie di Riemann, il poligono risultante sarà il *campo di discontinuità canonico* del gruppo; esso ha $2n + 8p$ lati, dove n è il numero delle *classi* (sistemi di punti equivalenti) di vertici ellittici e parabolici che figurano nel reticolo, e p è il genere della superficie F. Corrispondentemente si hanno $n + 4p$ sostituzioni generatrici, le quali sono legate da $n + 1$ relazioni.

Un ultimo concetto introdotto in questa prima parte è quello della *composizione* di due gruppi. Si compongono due gruppi formando il gruppo di tutti i possibili prodotti delle loro sostituzioni. Se ambi i gruppi figurano nel gruppo composto come sottogruppi d'indice finito, si dice che essi sono *commensurabili*.

Infine si pongono in luogo della variabile ζ le variabili omogenee ζ_1, ζ_2 il cui rapporto è eguale a ζ. Allora ad ogni sostituzione lineare non omogenea corrispondono infinite sostituzioni lineari omogenee, delle quali due sono *unimodulari*, cioè hanno il determinante $= 1$. La trasformazione dei gruppi non omogenei in gruppi omogenei dà luogo ad alcune ricerche, che chiudono la parte prima.

Nella *Parte seconda* trova il suo ulteriore sviluppo la teoria dei gruppi poligonali.

Nel *Cap. I* si esaurisce anzitutto lo studio dei gruppi rotatori ellittici e parabolici. Fricke chiama *gruppi rotatori* (*Rotationsgruppen*) quei gruppi che, considerati come trasformazioni dello spazio iperbolico in sè stesso, lasciano fisso un suo punto; secondochè questo è dentro, fuori o sopra la sfera assoluto, il gruppo dicesi *ellittico*, *iperbolico* o *parabolico*.

I gruppi rotatori ellittici sono i noti gruppi dei corpi regolari, e qui si dimostra per una nuova via che il loro numero è finito. I gruppi rotatori parabolici, o *gruppi biperiodici*, constano — quando la ζ sia scelta opportunamente — di sole sostituzioni della forma:

$$\zeta' = e^{\theta i}\zeta + c,$$

dove $0 \leq \theta < 2\pi$; se $\theta = 0$ la sostituzione è parabolica, se $\theta > 0$ è ellittica. Se il gruppo è composto di sole sostituzioni paraboliche e non è ciclico, il suo poligono generatore normale è un esagono a vertici tutti generici, il quale in casi speciali può ridursi ad un quadrangolo. L'esagono normale può trasformarsi, mediante variazioni lecite, in un parallelogrammo composto di 2 triangoli acutangoli. Se il gruppo contiene invece sostituzioni ellittiche, esso può ottenersi mediante com-

Digitized by Google

posizione d'uno o più gruppi ciclici con un gruppo formato di sole sostituzioni paraboliche; quest'ultimo entra nel gruppo composto come *sottogruppo distinto* (*ausgezeichnete Untergruppe*). Segue la ricerca delle condizioni sotto le quali è possibile l'*ampliamento* d'un gruppo rotatorio parabolico, e della via da seguirsi per effettuarlo.

Allo studio dei gruppi rotatori parabolici si riduce, mediante la rappresentazione logaritmica $\zeta_0 = lg\,\zeta$, quello dei gruppi non rotatori con due *punti limiti* (punti a cui i poligoni si avvicinano indefinitamente senza raggiungerli). Presi come punti limiti i punti 0 e ∞ (infinito) le sostituzioni di cui consta un gruppo non rotatorio con due punti limiti, o lasciano questi due punti invariati, ed hanno la forma $\zeta' = \alpha\zeta$, o li scambiano fra loro, ed hanno la forma $\zeta' = \frac{\beta}{\zeta}$.

Dopo ciò si passa a considerare i gruppi rotatori iperbolici, o gruppi a cerchio principale. Premesse alcune interessanti ricerche preliminari, sulle quali non ci è possibile soffermarci, si introduce una classificazione in famiglie (*Gattungen*), una famiglia (p, n) essendo caratterizzata dal genere p della superficie chiusa a cui si riduce il poligono generatore, e dal numero n dei cicli di vertici non generici che esso contiene. Se $s = 2q$ è il numero dei lati del poligono, m quello dei cicli di vertici generici, sussistono le seguenti relazioni:

$$q \leq 6p + 2n - 3,\quad m \leq 4p + n - 2,\quad 2p + m + n = q + 1. \qquad (4)$$

In virtù dell'ultima di esse ha luogo contemporaneamente nelle altre due l'eguaglianza o la diseguaglianza. Nel primo caso si dice che il poligono appartiene ad un *tipo ordinario*, nel secondo ad un *tipo singolare*. Si può passare dal primo al secondo caso, riducendo a zero uno o più lati del poligono.

È facile formare tutti i possibili tipi d'una data famiglia, cioè determinare tutti i sistemi di valori q, m che per dati valori di p ed n soddisfanno alle relazioni (4). Si dimostra che tutti questi tipi esistono effettivamente.

Collo studio dei tipi si connette la ricerca delle variazioni che subisce la forma d'un poligono quando se ne sposta il centro con continuità. Il luogo delle posizioni in cui può giungere il centro, partendo da una data posizione iniziale, senza che il numero dei lati del poligono diminuisca, è un campo connesso T. L'insieme dei campi analoghi a T costituisce una rete, e può assegnarsi un numero finito μ tale, che l'insieme di μ poligoni di questa rete opportunamente scelti formi un campo di discontinuità del gruppo. Esso dicesi un *campo di discontinuità naturale*.

Lo studio dei gruppi rotatori iperbolici viene continuato nel *Cap. II*, in base specialmente alla considerazione dei poligoni canonici. Nel

Digitized by Google

piano proiettivo può sempre costruirsi un poligono canonico a lati rettilinei e ad angoli concavi; inoltre ha luogo il seguente teorema, dove figurano certe denominazioni di cui non si potrebbe in poche parole spiegare il significato: Il passaggio da uno ad un altro poligono canonico d'uno stesso gruppo può farsi mediante un numero finito di *trasformazioni elementari;* queste sono per $p > 0$ in numero di $n + 5p - 3$, e cioè $2p$ di 1ª, $n + p - 2$ di 2ª, una di 3ª e $2p - 2$ di 4ª *specie.* Per $p = 0$ v'ha una sola trasformazione elementare.

Per venire a trattare dei *moduli* dei poligoni canonici, conviene definire gli *invarianti* d'una coppia di sostituzioni. Se si hanno due sostituzioni lineari V_1, V_2 a coefficienti reali e di determinante 1, e si applica ad esse una sostituzione della stessa natura, si ottengono altre due sostituzioni V_1', V_2', che costituiscono una coppia *equivalente* alla data, o appartenente alla medesima *classe.* Si dicono *invarianti* d'una coppia di sostituzioni quelle funzioni dei coefficienti di queste che non mutano di valore quando si passa dalla coppia considerata ad una equivalente. Gl'invarianti indipendenti d'una coppia di sostituzioni:

$$\zeta' = \frac{\alpha_1 \zeta + \beta_1}{\gamma_1 \zeta + \delta_1}, \qquad \zeta' = \frac{\alpha_2 \zeta + \beta_2}{\gamma_2 \zeta + \delta_2}$$

sono:

$$j_1 = \alpha_1 + \delta_1, \quad j_2 = \alpha_2 + \delta_2, \quad j_{12} = \alpha_1 \alpha_2 + \delta_1 \delta_2 + \beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1.$$

Una coppia dicesi di 1ª, 2ª, 3ª *specie*, secondochè il suo *asse*, ossia la congiungente i punti fissi delle due sostituzioni, taglia, non taglia o tocca l'ellisse. Due coppie equivalenti sono della stessa specie. Secondochè una coppia è di 1ª, 2ª, 3ª specie, si ha:

$$j_1^2 + j_2^2 + j_{12}^2 - j_1 j_2 j_{12} - 2 \gtrless 2.$$

Si dice *ridotta* una coppia di 1ª specie, se il suo asse ha per imagine nel piano ζ l'asse imaginario; una di 2ª specie, se il polo del suo asse ha per imagine nel piano ζ il punto $\zeta = i$; una di 3ª specie, se il punto di contatto dell'asse coll'ellisse ha per imagine nel piano ζ il punto $\zeta = \infty$.

Una classe di coppie di 1ª o di 2ª specie è determinata in modo unico dagli invarianti.

Diconsi *moduli* d'un gruppo certe funzioni dei coefficienti delle sostituzioni di cui esso si compone, le quali restano invariate per qualunque collineazione che muti in sè stessa l'ellisse fondamentale. Lo studio dei moduli d'un gruppo occupa tutta la seconda metà del capitolo che stiamo esaminando. Noi ci limiteremo a riferirne i risul-

Digitized by Google

tati per la famiglia più semplice, cioè per la famiglia (0, 3). Scelte le tre sostituzioni generatrici V_1, V_2, V_3 in modo che sia:

$$V_1 V_2 V_3 = 1,$$

e indicando con j_h, j_k, j_{hk} gli invarianti della coppia V_h, V_k, si ha:

$$j_{12} = -j_3, j_{23} = -j_1, j_{31} = -j_2.$$

Come moduli del gruppo possono prendersi le j_1, j_2, j_{12}; esse soddisfanno alle relazioni seguenti:

$$j_1^2 + j_2^2 + j_{12}^2 - j_1 j_2 j_{12} - 2 > 2, j_1 \geq 0, j_2 > 0, j_{12} < 0. \qquad (5)$$

inoltre si ha per quelle tra le j_1, j_2, j_3 che sono < 2:

$$j_i = 2 \cos \frac{\pi}{l_i},$$

dove le l_i sono numeri interi > 1. Reciprocamente, se le j_1, j_2, j_{12} soddisfanno alle (5), esiste una ed una sola classe di gruppi della famiglia (0, 3) che le ammette come moduli.

Chiude il capitolo l'argomento della trasformazione dei sistemi di moduli. Due sistemi di moduli corrispondenti a due poligoni canonici generatori dello stesso gruppo sono legati da relazioni birazionali. L'insieme di queste costituisce un gruppo di trasformazioni, che si dice il *gruppo modulare* della famiglia considerata.

Il *Cap. III* dovrebbe svolgere la teoria dei gruppi non rotatori, ma ne tratta soltanto alcuni casi speciali.

Anzitutto si considera il caso d'un quadrilatero (nel piano ζ) formato d'archi circolari ortogonali ad un medesimo cerchio; questo quadrilatero si assume come campo di discontinuità d'un gruppo misto. I quadrilateri di tale natura possono dividersi in 7 tipi, i quali possono essere caratterizzati mediante proprietà dei loro moduli. Importante è lo studio dei punti limiti e delle *linee limiti* (linee formate di punti limiti) pei vari tipi.

Segue qualche esempio di gruppi non rotatori.

La *Parte terza* si occupa della ricerca delle leggi aritmetiche secondo le quali sono formati i coefficienti delle sostituzioni d'un gruppo mediante quelli delle sostituzioni generatrici. E poichè tale ricerca si fonda sulla teoria delle forme quadratiche, il *Cap. I* espone le nozioni di tale teoria necessarie pel seguito e gli elementi della rappresentazione geometrica delle forme.

Digitized by Google

Per le *forme di Gauss*, o forme binarie quadratiche a coefficienti interi:

$$a x^2 + 2 b x y + c y^2, \tag{6}$$

si rappresenta nel semipiano ζ ciascuna forma definita, cioè a determinante negativo, mediante il punto imagine d'una radice dell'equazione:

$$a \zeta^2 + 2 b \zeta + c = 0, \tag{7}$$

ciascuna forma indefinita, cioè a determinante positivo, mediante il semicerchio, descritto in un senso determinato, che ha per diametro il segmento compreso fra le due radici, in questo caso reali, della (7). Due forme *equivalenti*, o della stessa *classe*, hanno imagini omologhe rispetto al gruppo modulare. Una forma è ridotta, se il suo punto imagine giace, o se il suo semicerchio imagine entra, nel poligono assunto nella teoria del gruppo modulare come generatore di questo gruppo. Non è forse superfluo rammentare come tale poligono sia costituito dalla parte della striscia del semipiano ζ compresa fra le parallele $\zeta = -\frac{1}{2}$ e $\zeta = \frac{1}{2}$ che è esterna al cerchio $\zeta = 1$. Ogni classe contiene forme ridotte. Il numero delle forme ridotte (e quindi il numero delle classi) di dato determinante è finito.

Il semicerchio imagine d'una forma di Gauss indefinita è diviso dal reticolo del gruppo modulare in un'infinità di archi; gli omologhi di questi nel poligono generatore rappresentano altrettante forme ridotte equivalenti alla data. Ma poichè il numero delle forme ridotte di dato determinante è finito, le forme trovate non possono essere tutte diverse, ma si riducono ad un numero finito. Queste forme ridotte equivalenti ad una medesima forma indefinita costituiscono un ciclo chiuso o *periodo*, di cui ogni elemento può ottenersi dal precedente mediante l'applicazione alternata delle due sostituzioni generatrici del gruppo modulare:

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Più generali delle forme di Gauss sono le *forme di Dirichlet*, in cui i coefficienti a, b, c sono interi complessi. Due tali forme diconsi *equivalenti*, se può passarsi dall'una all'altra mediante una sostituzione a coefficienti interi complessi di determinante 1.

Infine chiamansi *forme di Hermite* le espressioni:

$$a x \bar{x} + b x \bar{y} + \bar{b} \bar{x} y + c y \bar{y}, \tag{8}$$

dove a e c sono numeri interi reali, b e $\bar{b}$, x e $\bar{x}$, y e $\bar{y}$ numeri interi

Digitized by Google

complessi coniugati. Posto $b = b_1 + i b_2$, si dice *determinante* della forma (8) l'espressione reale:

$$D = b\bar{b} - ac = b_1^2 + b_2^2 - ac.$$

Due forme di Hermite sono *equivalenti*, se si può passare dall'una all'altra di esse mediante una sostituzione:

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y', \\ \bar{x} &= \bar{\alpha} \bar{x}' + \bar{\beta} y', \quad \bar{y} = \bar{\gamma} \bar{x}' + \bar{\delta} \bar{y}', \end{aligned}$$

dove α e $\bar{\alpha}$, β e $\bar{\beta}$, γ e $\bar{\gamma}$, δ e $\bar{\delta}$ sono numeri interi complessi coniugati, e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Come lo studio dell'equivalenza delle forme di Gauss conduce al gruppo modulare, così quello dell'equivalenza delle forme di Dirichlet e di Hermite conduce al gruppo di Picard.

I problemi fondamentali da risolversi sono due, e cioè:

Date due forme di egual determinante, riconoscere se sono equivalenti;

Date due forme equivalenti, trovare tutte le sostituzioni mediante le quali si passa dall'una all'altra di esse.

La forma di Hermite (8) ha per imagine nel semispazio ζ, se *definita* ($D < 0$) *positiva* ($a > 0$, $c > 0$), il punto:

$$\xi = -\frac{b_1}{a}, \quad \eta = \frac{b_2}{a}, \quad \theta = +\frac{\sqrt{-D}}{a},$$

se *indefinita* ($D > 0$), la semisfera avente per cerchio massimo il cerchio del piano ζ:

$$a(\xi^2 + \eta^2) + 2b_1\xi - 2b_2\eta + c = 0.$$

La forma di Dirichlet (6) ha per imagine il semicerchio posto in un piano perpendicolare al piano ζ e avente per diametro la congiungente i due punti del piano ζ in cui la (7) è soddisfatta.

Una forma è determinata quando sono dati il suo determinante e la sua imagine.

Una forma è *ridotta* se il suo punto imagine giace, o il suo semicerchio o la sua semisfera imagine entra, nel poliedro generatore del gruppo di Picard, il quale è definito dalle relazioni:

$$-\frac{1}{2} \leq \xi < \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \theta^2 \geq 1.$$

Una forma di Hermite definita positiva è equivalente ad una e ad una sola forma ridotta. Il numero delle forme ridotte (e quindi delle classi) di dato determinante è finito.

Digitized by Google

Anche per le forme di Dirichlet è finito il numero delle forme ridotte; inoltre ogni classe contiene un *periodo* di tali forme, che si ottengono le une dalle altre mediante un processo detto di *riduzione continua*.

Analoghi risultati si hanno per le forme indefinite di Hermite; soltanto, invece di un periodo, si ha in ogni classe una *rete* di forme ridotte.

Dicesi *gruppo riproducente* d' una forma, indefinita di Hermite quel sottogruppo del gruppo di Picard che lascia invariata la sua semisfera imagine; esso è un gruppo propriamente discontinuo nel piano ζ avente per cerchio principale il cerchio base della semisfera, di *carattere* (p, n) finito, e impropriamente discontinuo sul cerchio principale. Come esempio vengono sviluppati i casi di $D = 5$ e di $D = 7$.

Anche il piano proiettivo può assumersi come imagine geometrica dell' insieme delle forme di Gauss. Si prendano a, b, c come le coordinate omogenee dei punti del piano, e si scelga il sistema di coordinate in modo che l' equazione:

$$b^2 - ac = 0 \tag{9}$$

rappresenti un' ellisse. Considerando il punto (a, b, c) come l' imagine della forma (6), questo punto sarà interno od esterno all' ellisse secondochè la forma è definita o indefinita. L' equivalenza di due forme coincide coll' equivalenza delle loro imagini rispetto al gruppo modulare. Siccome però il reticolo rappresentante questo gruppo ricopre solo l' interno dell' ellisse (9), converrà prendere come imagine d' una forma indefinita (6), anzichè il punto (a, b, c), la sua polare rispetto all' ellisse.

Analogamente può procedersi per le forme di Dirichlet e di Hermite. A tale proposito è da osservarsi che, se x_1, x_2, x_3, x_4 sono le coordinate omogenee dello spazio iperbolico, e se queste sono scelte in modo che la sfera assoluto abbia per equazione:

$$x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_4 = 0, \tag{10}$$

il gruppo di Picard (non ampliato) è identico al gruppo delle sostituzioni reali a coefficienti interi e di determinante 1 che lasciano invariata la forma quaternaria $x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_4$ (*gruppo riproducente* della forma quaternaria). Dopo ciò si prende come imagine d'una forma di Hermite (8) il punto $(c, -b_1, b_2, a)$ o il suo piano polare rispetto alla sfera (10), secondochè la forma è definita o indefinita, come imagine d' una forma di Dirichlet (6) la retta che congiunge i due punti radice della (7) sulla sfera (10) considerata come sfera ζ.

Nel *Cap. II* viene esteso lo studio dei gruppi riproducenti ad altre forme quadratiche, e cioè:

Digitized by Google

a) Alle forme ternarie indefinite a coefficienti interi reali;
b) Alle forme ternarie a coefficienti interi complessi;
c) Alle forme quaternarie indefinite a coefficienti interi reali.

I gruppi riproducenti delle forme *a*) sono gruppi rotatori iperbolici di carattere (p, n) finito; essi possono costruirsi geometricamente mediante il processo di riduzione continua, o mediante quello di ampliamento per riflessione, aritmeticamente mediante la considerazione che il gruppo riproducente della forma ternaria $f = z_2^2 - z_1 z_3$ è il gruppo modulare, e che ogni forma ternaria indefinita può trasformarsi razionalmente nella f.

Considerazioni analoghe guidano alla costruzione aritmetica del gruppo riproducente delle forme *b*); a tale scopo si deve partire dall'osservazione che la f, considerata come una forma *b*), ha per gruppo riproducente il gruppo di Picard.

Il gruppo riproducente delle forme *c*) è un gruppo propriamente discontinuo nel semispazio ζ ma non nel piano ζ. Il problema della costruzione aritmetica di tale gruppo non è ancora completamente risolto; esso viene qui trattato per la forma:

$$z_2^2 + r z_3^2 - z_1 z_4,$$

dove r è un numero reale intero e positivo, e si giunge in questo caso ad un gruppo poliedrico i cui coefficienti sono numeri interi del *corpo algebrico* $[1, i\sqrt{r}]$.

Il *Cap. III* è dedicato allo studio del gruppo riproducente d'una forma ternaria quadratica i cui coefficienti sono numeri interi d'un corpo algebrico di grado qualunque.

Questa rapida scorsa attraverso il grosso volume che ci sta dinanzi, se è per avventura sufficiente a dare un'idea del ricco contenuto di esso, lascia però di necessità nell'ombra il suo valore *suggestivo*, dovuto ai frequenti accenni alle parti ancora incompiute della teoria, ai problemi di cui essa attende tuttora la soluzione, ai perfezionamenti di cui è suscettibile. Non possiamo quindi passare sotto silenzio questo, che è, a nostro avviso, un grande pregio della nuova opera di Fricke, destinata indubbiamente a dare un vigoroso impulso allo studio delle funzioni automorfe, specialmente in Germania, dove essa trova il terreno già preparato dalle lezioni di Klein e de' suoi discepoli. Per altri paesi, come il nostro, in cui il terreno è ancora vergine o quasi, quell'opera ha il difetto comune con altre sue congeneri — le *Vorlesungen über Modulfunctionen* di Klein e Fricke, la *Theorie der Transformationsgruppen* di Lie, etc. — di essere troppo voluminosa, talchè non molti hanno il coraggio d'intraprenderne lo

Digitized by Google

studio. Sarebbe cosa utile, e forse non difficile, esporre in lavori di assai minor mole i punti essenziali di queste nuove teorie, trascurando, in quanto è possibile, i dettagli, in modo che chi legge potesse con lieve fatica arrivare a conoscerne le grandi linee, e trovarsi preparato ad uno studio più profondo. Lavori di questo genere, mentre servirebbero alla diffusione delle nuove conquiste della scienza, non potrebbero mancare di condurre chi vi si accingesse ad interessanti ricerche originali.

Ci auguriamo che venga presto in luce il seguito dell'opera di Fricke, il quale ci permetterà di apprezzare più adeguatamente l'importanza e la fecondità dei metodi aritmetico-geometrici esposti in questa prima parte.

G. VIVANTI.

M. CANTOR. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Dritte Abtheilung. Die Zeit von* 1727 *bis* 1758. Leipzig, Teubner, 8.° gr., p. XIV + 421.

Il *Bollettino* saluta come un avvenimento memorabile e lieto la pubblicazione del fascicolo con cui si chiude l'ultimo volume della grande opera storica di Maurizio Cantor. Chi scrive queste linee si è già occupato in tante occasioni di questo magistrale lavoro che trova ora ben poco da aggiungere alle lodi che altre volte gli ha largamente tributate. Il metodo, lo stile ed il modo di procedere dell'eminente storico tedesco sono generalmente conosciuti; come note pure sono l'instancabile diligenza con cui egli ha adunato l'immenso materiale utilizzato e l'onesta sincerità con cui egli sa distinguere i problemi storici ormai risoluti da quelli che tuttora esigono dilucidazioni o complementi.

Il periodo storico al quale è consacrata l'ultima sezione delle *Vorlesungen* va dal 1727 al 1758. È un'epoca in cui sul vetusto tronco della scienza matematica non germoglia alcun nuovo ramo; è l'epoca in cui i principî del calcolo infinitesimale vengono assodati, svolti e largamente applicati, preparando così la costituzione dell'analisi moderna. In pari tempo la geometria elementare si accresce di qualche nuovo teorema e di qualche nuovo punto di vista (specialmente per merito del Saccheri) e la geometria analitica estende allo spazio i metodi di investigazione che le sono proprî. Ancor più fortunata la storia della matematica si arricchisce, per merito del Montucla di un'opera che ancor oggi merita, non soltanto grande estimazione; ma di venire tuttora consultata colla fiducia di ritrarne ajuti e consigli (1). — È un'epoca di pace, in assoluto contrasto con quella

(1) Ciò dipende, in parte dal non aver Cantor fatto menzione di tutti i matematici di cui parla il Montucla; cito come esempio la dimenticanza, veramente deplorevole, di cui fu vittima Gabriele Manfredi.

Digitized by Google

precedente — ove la teoria degli isoperimetri accese una lotta fratricida, ove l'invenzione dei nuovi calcoli fe' scendere in campo Inghilterra e Germania — ed anche con quella seguente — ove la geometria pura sostenne una titanica lotta per conquistare il posto che le spetta nello scibile matematico. — La famiglia Bernoulli continua in questo periodo a contribuire, in modo degno delle sue tradizioni, al progresso delle matematiche; inoltre in esso la falange dei lavoratori si accresce di matematici di primo ordine quali d'Alembert e Clairaut, Maclaurin, Stewart e Simson. Ma la figura che campeggia, quale onnipossente sovrana, è quella di Eulero: la cui opera scientifica è delineata dal Cantor con tanta amorosa cura, non iscompagnata da scrupolosa giustizia, che il lettore rimpiange che i limiti cronologici impostici gli abbiano impedito di seguire quel sommo sino al momento in cui « cessò di calcolare e di vivere », e formulerà, come noi, il voto che egli si decida a completare il quadro così sapientemente cominciato, arricchendo la letteratura storica di una completa monografia sopra l'autore dell' *Introductio in analysin infinitorum.*

Nella prefazione il Cantor dichiara di lasciare ad altri il còmpito di proseguire la storia della matematica oltre al 1758, anno assai notevole per la pubblicazione della prima memoria di Lagrange; egli per converso si propone di dedicare tutta l'invidiabile attività di cui dispone a curare le edizioni successive della sua opera (il I vol. già n'ebbe una seconda, ed i vol. seguenti stanno già per averle!) A facilitargli il conseguimento dello scopo che egli si propone, di fare avvicinare il suo lavoro alla desiderata perfezione, tutti i volonterosi possono adoperarsi; ed il *Bollettino* apre ad essi le proprie colonne, segnalando due grandi problemi che meritano tutta l'attenzione di chi ha a cuore i progressi della storia della matematica. Consiste uno nel determinare con esattezza la parte presa dell'Italia al movimento matematico, dalla morte di Galileo in poi; si tratta in altre parole di completare e proseguire l'opera del Libri, servendosi dei dati preziosi adunati dal Riccardi nella sua *Biblioteca matematica* (2). Più vasto in un senso, ma in altro più ristretto, è il secondo dei suaccennati problemi: esso consiste nel narrare la storia del metodo delle coordinate. Come accade di regola per tutte le grandi invenzioni, i primi che conobbero quel metodo si affrettarono ad applicarne i canoni essenziali a problemi particolari, senza preoccuparsi di verificare quanto solido ne fosse il fondamento e di studiare se il campo su cui esercitava il proprio dominio potesse ampliarsi o invece dovesse eventualmente venire ristretto; ed è notevole come venissero escluse (o malamente risolte) tutte le

(1) Opera di cui, a dir vero, ci sembra che il Cantor non abbia tenuto abbastanza conto.

Digitized by Google

questioni aventi attinenza colla determinazione della forma delle figure geometriche considerate. Ora come il rozzo strumento modellato da Descartes e Fermat sia stato gradatamente perfezionato sino a raggiungere lo stato in cui attualmente si trova, in particolare come si siano introdotti i segni delle coordinate e si sia revocato il bando pronunciato contro i valori infiniti di esse, è questione che ancora non è stata trattata e la cui importanza è palese senza dimostrazione: possa questa osservazione spingere qualcuno a colmare tale lacuna nella letteratura storica collo scrivere una « storia della geometria analitica », destinata a prendere posto accanto alle storie della geometria projettiva, della geometria descrittiva, del calcolo infinitesimale ecc., che già possediamo.

G. L.

Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9 bis 11 August 1897. Leipzig, B. G. Teubner, 1898, 8.° gr. p. VIII + 306.

Manteniamo la promessa fatta ai nostri lettori (questo *Bollettino*, anno 1897, p. 20) col far cenno del volume in cui son consegnati i frutti che diede il primo congresso internazionale di matematici. È un bel volume signorilmente stampato per cura della famosa casa editrice Teubner di Lipsia; è un prezioso volume alla cui pubblicazione presiedette il Prof. Rudio. Oltre ad esatte notizie intorno alla preistoria del congresso ed al suo andamento, contiene — alcuni per esteso, altri in compendio — gli scritti (in numero di 34) che furono letti o comunicati al congresso. Un buon numero di essi toccano a questioni di indole generale, il che corrisponde pienamente alla natura che devono avere letture destinate ad interessare un pubblico numeroso e vario; tali sono la conferenza del Poincaré *Sui rapporti fra l'analisi pura e la fisica matematica*, quella del Bougaïev intorno a *La matematica ed il concetto dell'universo dal punto di vista della filosofia scientifica*, quella del Galdeano relativa a *L'unificazione dei concetti matematici*, quella dello Stodola *Sulle relazioni tra matematica e tecnica* e finalmente quella di F. Klein *Intorno alla questione dell'insegnamento matematico superiore;* una considerevole ampiezza possiedono pure le letture dell' Hurwitz *Intorno allo sviluppo recente della teoria delle funzioni analitiche*, del Rudio *Sulle questioni e l'organizzazione dei congressi matematici* e dell' Enestrom *Sulle recenti imprese matematico-bibliografiche*, nonchè altre sulle funzioni a più variabili (E. Picard), sulla risoluzione delle equazioni algebriche a più incognite (F. Enriques) e sullo sviluppo storico della teoria delle curve piane (G. Loria). Non mancarono comunicazioni intorno alle

Digitized by Google

varie branchie della matematica, come emerge dal seguente elenco di materie trattate e di oratori che se ne occuparono: *Teoria dei numeri ed algebra:* Brioschi, Fr. Meyer, Pervouchine, Stickelberger, de la Vallée Poussin, H. Weber. *Logica matematica:* Peano, Schröder. *Teoria delgi insiemi:* Borel, Hadamard, Pincherle. *Teoria delle funzioni:* Autonne. *Geometria della retta*: Reye. *Gruppi di trasformazioni:* Fano, Gerbaldi. *Geometria non-eudidea:* Andrade, Burali-Forti. *Topologia:* Brunn. *Meccanica applicata*: Joukowski. *Storia:* Zeuthen.

L'esame di questi *Atti* prova che coloro i quali organizzarono e diressero questa prima riunione di matematici possono essere soddisfatti del conseguito risultato e possono andare superbi di avere fornito un ottimo modello a chi presiederà i congressi futuri, in particolare alla Società matematica di Francia, incaricata di organizzare il prossimo che sarà tenuto a Parigi dal 6 al 12 Agosto 1900.

G. L.

H. ANDOYER, *Leçons élémentaires sur la théorie des formes et ses applications géométriques, à l'usage des candidats à l'agrégation des sciences mathématiques.* Paris, Gauthier-Villars, 1898, p. 184 (litogr.).

Questo lavoro è un primo saggio di un' opera di maggior lena che l'A. prepara sulla teoria delle forme in generale. Essa è diretta ai principianti ai quali vuol fare conoscere le proprietà essenziali delle formazioni invariantive nei campi binario e ternario; ad essi va raccomandata per lo stile semplice e rigoroso ad un tempo e per le applicazioni di teorie elevate ad idee moderne (cito ad esempio le notizie sull' intervento nella teoria delle forme dei sistemi completi e sull' uso nella stessa delle idee fondamentali del Lie). L' analogia, che spicca evidente dal libro dell' Andoyer, fra le proprietà delle forme binarie e quelle delle ternarie, ne suggerisce tosto al lettore la completa generalizzazione a forme con quante si vogliano variabili: il che va notato a lode dell' A. Se altrettanto debbasi ripetere riguardo all' esclusione della notazione simbolica, non oserei dire ignorando le ragioni che la consigliarono: forse perchè essa non era inevitabile pel raggiungimento del modesto scopo che l' A. si è prefisso? o perchè egli intende dimostrare, nella maggiore opera promessa, che essa non è indispensabile per attingere le vette più eccelse della teoria delle forme?.... All' avvenire la risposta.

G. L.

Digitized by Google

P. MANSION. *Mélanges mathématiques* (1883-1898). Paris, Gauthier-Villars, 1898, 8.°, p. IV + 160 + 56.

È questa una raccolta (1) di brevi articoli pubblicati dal Mansion nel periodo 1883-1898; sei di essi sono storici e cinque biografici, cinque vertono sull' analisi algebrica e dodici sul calcolo infinitesimale, quattro sulla meccanica, cinque sul calcolo probabilità e diciasette sulla geometria non-euclidea (teoria e storia). Tutti sono interessanti e di lettura piacevole; quelli però che, nel loro insieme, ci sembrano emergere concernono i principî della scienza dell' estensione, dei quali dovranno tener conto gli storici ed i futuri cultori della geometria non-euclidea. G. L.

Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen von D.r C. NEUMANN (Leipzig 1896, 8.°, p. XXII + 292).

Nella impossibilità di spiegare, per ora, la natura delle così dette *azioni a distanza*, interessa tuttavia discutere se proprio esse si manifestino secondo la legge di Newton. Poichè contro questa legge si sono levate obbiezioni vuoi nel campo astronomico, vuoi in quello della fisica matematica e cioè nella teoria della elasticità, della capillarità, dell'ottica, della elettricità e del magnetismo. Così, pressapoco, dice l'illustre professore della Università di Lipsia nella prefazione al suo libro del quale qui riferiamo. Sopratutto sembra a lui che si debba accogliere con diffidenza quel concetto degli *strati infinitamente sottili*, secondo i quali la elettricità deve necessariamente distribuirsi, in base alla legge di Newton, in un conduttore allo stato di equilibrio. È probabile che si possa, sostituendo alla legge di Newton un'altra pochissimo differente, ottenere, per un conduttore in equilibrio, una distribuzione di elettricità la quale, senza contraddire ai dati dell'esperienza, escluda quegli strati a densità superficiale finita.

Nel suo libro che l'A. chiama modestamente « ein kleiner Beitrag zur allgemeine Theorie der Fernwirkungen » egli ha inteso fare un lavoro preparatorio per una futura discussione delle possibili forme della legge secondo cui hanno luogo le azioni a distanza. (Noi, per brevità, indicheremo queste varie forme col nome di *leggi del potenziale*). Egli ritiene necessario, citiamo le sue parole, « che si sviluppi la teoria delle azioni a distanza nella maggiore possibile generalità, non già nella speranza che una tale teoria conduca subito a conclusioni fisiche importanti, ma nell'intento di ordinare, allargare e forse render

(1) Essa fa seguito ai *Mélanges mathématiques* (1874-1882) pubblicata dall' autore, sedici anni or sono.

Digitized by Google

usufruibile per l'avvenire il campo delle idee che a questo argomento si riferiscono ».

Le ricerche dell'A. si aggirano qui sopratutto sul problema dell'equilibrio elettrico. Si può ammettere come postulato sperimentale che un conduttore carico di elettricità, isolato o no, sotto l'azione, o meno, di altre masse elettriche, si pone sempre in equilibrio. Questo principio si presta molto bene alla discussione delle varie leggi del potenziale e ci permette, innanzi tutto, di eliminare subito un gran numero di esse, come non compatibili col postulato stesso.

Ecco un breve sunto dei capitoli dell'opera. Con $\varphi(r)$ indicheremo il potenziale fra due masse *unità* concentrate in punti a distanza r; con ε la densità *di spazio,* con η la densità *superficiale.*

Cap. I. Ricerche di Laplace e di Bertrand sulla forma che deve avere $\varphi(r)$ affinchè il potenziale di uno strato sferico omogeneo sopra un punto esterno sia identico a quello di una egual massa condensata al centro. Segue l'esame della legge $\varphi(r) = \frac{1 - e^{-\alpha r}}{r}$ (1) la quale differisce pochissimo da quella di Newton quando ad α si dia un valore positivo assai grande. L'A. dimostra che la (1) è *incompatibile* coll'equilibrio in un conduttore sferico, al quale sia comunicata una carica simmetrica rispetto al centro (Valendosi di una notissima formola di Green e di alcune formule date dall'A. al § 6 del Cap. III si può fare la dimostrazione della impossibilità dell'equilibrio nel modo più generale, ossia per un conduttore qualunque, comunque caricato nell'interno e alla superficie).

Nè vi può essere equilibrio se $\varphi(r) = A\, r^n$ dove n è un dispari positivo qualunque. La legge $\varphi(r) = A\, \frac{e^{\alpha r} - e^{-\alpha r}}{r}$ dà invece infiniti stati possibili di equilibrio in un conduttore sferico al quale sia comunicata una data carica.

Il Cap. II tratta delle condizioni generali di equilibrio in un conduttore sferico isolato carico di elettricità distribuita simmetricamente rispetto al centro. L'A. comincia dal cercare quale dev'essere la forma di $\varphi(r)$ affinchè, nello stato di equilibrio, si abbia rispettivamente

$$\begin{aligned} &\eta = a && \varepsilon = a_0 \\ &\eta = a && \varepsilon = a_0 + a_1 \rho^2 \\ &\eta = a && \varepsilon = a_0 + a_1 \rho^2 + a_2 \rho^4 \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

dove con ρ s'intende la distanza del centro dal punto in cui la densità è ε. E trova che in ogni caso la φ deve essere della forma

$$(2) \qquad \varphi(r) = A\, \frac{e^{-\alpha r}}{r} + B\, \frac{e^{-\beta r}}{r} + \cdots,$$

Digitized by Google

dove il numero dei termini cresce al crescere del numero di quelli che esprimono ε. Si vede dunque la attitudine della (2) (che l'A. chiama legge *esponenziale*) ad esprimere il potenziale elementare in un infinito numero di casi. Ricorrendo agli sviluppi in serie, l'A. crede di poter concludere che, ogni qualvolta ε si ritenga sviluppabile in serie di Fourier, per ρ variabile da zero ad R raggio della sfera, la legge esponenziale sia l'unica compatibile coll'equilibrio. Se veramente l'equilibrio avrà luogo, e per quali valori delle costanti A, α, etc., resta a discutere nel Cap. III. Nel quale è introdotto un elegante metodo per le discussioni sulla possibilità dello equilibrio. Supposto un sistema materiale in movimento sotto l'azione di certe *date* forze interne ed esterne, l'A. immagina aggiunte a queste delle *forze fittizie*, che egli chiama *Reibungskräfte* e che sono soggette soltanto alla condizione di annullarsi ogni qualvolta il sistema giunga allo stato di quiete. È chiaro che, se si dimostra che il sistema arriva all'equilibrio col sussidio di queste forze fittizie, l'equilibrio sussisterà anche senza di esse, e viceversa, se questo non può ottenersi coll'aiuto di esse, a maggior ragione non potrà aversi equilibrio senza di esse. L'A. specializza meglio la natura delle forze fittizie, nel caso del movimento elettrico, ritenendole, per ogni elemento, dirette secondo la tangente alla corrente e di grandezze proporzionali all'intensità della corrente stessa. Dette cioè u, v, w le componenti della corrente in un punto, sono $-ku$, $-kv$, $-kw$ le componenti della forza fittizia per la massa *unità* concentrata in quel punto; k è una costante cui si può attribuire un valore ed un segno ad arbitrio. Chiamando P l'*ipsopotenziale* del sistema, ossia il potenziale totale del sistema sopra sè stesso, e $d\tau$ un elemento qualunque di volume, si stabilisce la formola fondamentale

$$\frac{d\,\mathrm{P}}{dt} = -\,k \int (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau \qquad (3)$$

dove t è il tempo, e l'integrale è esteso a tutto lo spazio. Coll'aiuto delle (3) l'A. dimostra: 1.° che la $\varphi(r) = \mathrm{A}\, r^n$, dove n è un numero pari positivo, non può dar luogo all'equilibrio; 2.° che colla ordinaria legge di Newton l'equilibrio è sempre possibile; 3.°, che l'equilibrio ha luogo anche colla esponenziale (2) purchè A, B, C..... siano tutte dello stesso segno e α, β, γ..... siano tutte positive. Dimostra poi che per ogni dato sistema e ogni data carica, vi ha *un solo* stato possibile di equilibrio.

Nel § 8 dello stesso Capitolo si ricerca quale formola sia da sostituirsi a quella di Poisson, quando la $\varphi(r)$ abbia la forma esponenziale. Si trova, essendo Δ il parametro differenziale secondo,

$$\text{per } \varphi = \mathrm{A}\,\frac{e^{-\alpha r}}{r}, \qquad \Delta\,\mathrm{V} = \alpha^2\,\mathrm{V} - 4\pi\,\mathrm{A}\,\varepsilon \qquad (4)$$

Digitized by Google

E generalmente, indicando con Δ^n la operazione Δ ripetuta n volte, si trova che, se la φ ha la forma (2) con n termini, esiste una relazione lineare fra, $\Delta^n V$, $\Delta^{n-1} V, \ldots \Delta V$, V, $\Delta^{n-1} s, \ldots \Delta s$, s.

Finalmente è considerata una forma di legge del potenziale, adottata da Green nella memoria *Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids* etc. (Math. Papers of Green pag. 123 e segg.[1]), ossia la $\varphi(r) = r^{1-n}$, cui l'A. sostituisce la

$$\varphi(r) = r^{p-2} \tag{5}$$

assoggettando p alla condizione $0 < p < 1$. Egli pone la r^{p-2} sotto la forma di un integrale Euleriano, e dimostra così come la (5) possa riguardarsi come caso *particolare* o meglio *limite* della forma esponenziale (2). In realtà le successive conclusioni fanno vedere come questa ammissione sia alquanto azzardata (V. pag. 220) (*).

Cap. IV. Detti ρ, ρ_1 i raggi vettori di due punti la cui distanza è r, e detto μ il coseno dell'angolo $(\rho\,\rho_1)$, vengono sviluppate in serie di funzioni sferiche di μ le funzioni $\frac{e^r + e^{-r}}{r}$, $\frac{e^r - e^{-r}}{r}$, $\frac{e^{\alpha r}}{r}$, $\frac{e^{-\alpha r}}{r}$. I coefficienti della $P_n(\mu)$ sono certe funzioni di ρ e ρ_1 che l'A. esprime mediante serie e delle quali studia le notevoli proprietà. Esortiamo il lettore allo studio completo della magistrale analisi del Neumann.

Siffatti sviluppi ci abilitano a studiare la distribuzione della elettricità in un conduttore in equilibrio nella ipotesi della legge esponenziale. Il Cap. V è dedicato alla formola a un sol termine

$$\varphi(r) = A\frac{e^{-\alpha r}}{r} \tag{6}$$

I risultati più importanti sono: 1.° Una sfera a strati omogenei esercita sopra un punto esterno un'azione eguale a quella che sul punto stesso avrebbe una *certa* massa condensata al centro. Questa massa è *proporzionale* ma non *eguale* alla massa totale effettiva. 2.° La formola (4) dimostra che nell'interno di ogni conduttore in equilibrio la densità ε dev'essere costante; essa, in particolare, dev'essere *nulla* pei conduttori comunicanti colla terra. 3.° In un conduttore sferico isolato,

(*) Per persuadersi che vi ha una sostanziale differenza fra il modo di comportarsi della formola esponenziale a numero finito di termini e quello della formola di Green, basta osservare p. es. che, nel passaggio attraverso ad una superficie su cui sia distribuita una massa finita, la derivata normale $\frac{dV}{dn}$ subisce una variazione sempre *finita* nel primo caso, e sempre *infinita* invece nel caso della legge di Green. – È assai facile verificarlo.

Digitized by Google

non soggetto ad alcuna azione esterna, la carica M si ripartisce in due parti; una

$$M\,(1+\alpha R):(1+\alpha R+\frac{\alpha^2 R^2}{3})$$ ripartita unif.^{te} alla superficie

l'altra $M\,\frac{\alpha^2 R^2}{3}:(1+\alpha R+\frac{\alpha^2 R^2}{3})$ » » nell'interno

Dunque, ammessa la (6), non vi può essere equilibrio senza che si formi, come nel caso della legge newtoniana, uno strato superficiale. (E aggiungiamo che si può dimostrare la stessa cosa per un conduttore di qualsiasi forma).

Il Cap. VI è dedicato allo studio della distribuzione in un conduttore sferico, soggetto o no all'azione di masse elettriche concentrate in punti esterni, nel caso della legge esponenziale a più termini (2). E anche qui si dimostra sempre la necessità dello *stato superficiale.*

Il capitolo termina con tre interessanti teoremi, i quali in ultima analisi, danno il modo di valutare (qualunque sia la legge $\varphi(r)$) il potenziale di un conduttore isolato sopra un punto esterno P, quando sia noto il modo di distribuzione dell'elettricità che sul conduttore, supposto a terra, sarebbe indotta da una massa elettrica concentrata in P.

Nel Cap. VII si tratta della legge di Green

$$(5)\qquad \varphi(r)=r^{p-2} \qquad\qquad 0<p<1$$

Sviluppata la r^{p-2} per serie di funzioni sferiche, e calcolato il potenziale interno di una sfera in cui la densità varii secondo certi determinati modi, l'A si pone in grado di risolvere i seguenti problemi.

1.° Determinare, in base alla (5), la densità in punto qualunque P di un conduttore sferico isolato in equilibrio, non soggetto ad azioni esterne. Si trova

$$(7)\qquad \varepsilon=\frac{A}{(R^2-\rho^2)^q} \qquad\qquad q=\frac{p+1}{2}$$

dove R è il raggio della sfera, ρ la distanza del punto P dal centro.

2.° Determinare ε nel caso di una sfera isolata sulla quale agisca una massa elettrica uniformemente ripartita sopra una sfera concentrica di raggio. $R_1 > R$. Si trova

$$(8)\qquad \varepsilon=\frac{A'}{(R_1^2-\rho^2)\,(R^2-\rho^2)^q}$$

3.° Determinare ε nel caso di un conduttore sferico, a terra, sul quale

Digitized by Google

agisca una massa elettrica condensata in un punto esterno Q. Si trova

$$\varepsilon = \frac{A''}{(R^2 - \rho^2)^{\varrho}} \quad \frac{1}{r^5} \qquad (9)$$

dove r è la distanza PQ. Con A, A', A'' abbiamo, per semplicità, indicate delle quantità indipendenti dal punto P, ossia da ρ e r.

La soluzione dei due primi problemi era stata data già da Green nella citata Memoria; la soluzione del 3.° è dovuta al Neumann stesso. Ciò che vi ha di oltremodo notevole si è che qui, per la prima volta, si ottengono casi di equilibrio senza la necessità di introdurre *strati superficiali* di massa finita. Si può bensì osservare che in questi tre casi la densità ε diventa infinita alla superficie della sfera, ma è facile vedere (con noti principii di calcolo integrale) che, ciò non ostante, la massa totale contenuta in uno strato *infinitesimo* contiguo alla superficie della sfera, è pur essa infinitesima, purchè come si è detto, si supponga $p < 1$. Questa osservazione, sott'altra forma è stata fatta già da Green (vedi le citate *Mat. papers* pag. 154).

Ci permetteremo, piuttosto, un'altra osservazione. Se si calcola il potenziale V esercitato sopra un punto esterno, a distanza ρ dal centro, dalla massa sferica distribuita secondo la formola (8) e si deriva poi V rispetto a ρ si trova che la $\frac{dV}{d\rho}$ *cresce oltre ogni limite* quando il punto potenziato si approssima alla superficie della sfera. Vale a dire che una tale distribuzione di massa eserciterebbe un'azione infinitamente grande sopra punti esterni attigui alla superficie. Può questo risultato servire alla rappresentazione di un caso reale?

Cap. VIII. Sul principio di Hamilton. In questo capitolo, che si stacca alquanto dai precedenti, l'A. sviluppa un ordine di idee già altra volta da lui trattate, e che formarono pure argomento di note ricerche di Helmholtz. — Ammettiamo, generalmente, che la legge di ogni movimento possa dedursi dal principio di Hamilton

$$\delta \int_{\alpha}^{\beta} (\tau - W)\, dt = 0,$$

dove τ è la forza viva e W una funzione che, nel caso più generale, dipende, oltrechè dalle coordinate dei punti, anche dalle loro derivate 1ª, 2ª, ... rispetto al tempo, e a cui l'A. dà il nome di *potenziale effettivo* (equivale al potenziale ordinario nel caso in cui esso è funzione delle sole coordinate). L'A. considera un sistema formato di due soli punti materiali e determina le equazioni differenziali del moto e

Digitized by Google

la espressione della forza mutua, facendo alcune ipotesi sulla natura della W. Ci limitiamo a segnalare il risultato, che ci sembra il più notevole di tutti (§ 3) che cioè quella azione mutua fra due elementi elettrici, che si manifesta secondo la legge di Weber

$$R = \frac{mm_1}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right\}$$

può considerarsi come dovuta ad un ordinario potenziale *ritardato;* nella ipotesi, cioè, che l'azione mutua si trasmetta con una certa velocità finita c, ossia che il potenziale fra le due masse m, m_1 nell'istante in cui la loro distanza è r non sia già $mm_1\varphi(r)$, ma bensì $mm_1\varphi(r-\rho)$, dove ρ la quantità di cui cresce r nel tempo $\frac{r}{c}$ che occorre per superare la distanza r colla velocità c. L'A. ci avverte che questa idea del potenziale ritardato. era stata data già (benchè non sviluppata) da Riemann nel Vol. 131 dei Pogg. Annalen (*).

Cap. IX. L'A. chiama *funzione fondamentale* della spazio I racchiuso da una superficie S una funzione U la quale soddisfaccia nei punti interni ad S alle condizioni: 1.°, di essere finita ed univalente; 2.°, che le sue derivate prime siano continue: 3.°, che sia verificata l'equazione $\Delta U = \alpha^2 U$. — E chiama poi *funzione fondamentale* dello spazio A esterno alla S una funzione che soddisfà, esternamente ad S, alle tre condizioni ora dette, e di più a quella di assumere, a distanza infinita, un valore costante finito (che si dimostra poi dovere essere *zero*). Dimostra poi che la U è perfettamente determinata sia in I che in A dati che siano i valori di essa sulla superficie S. Risolve finalmente, col metodo della *media aritmetica* il problema di determinare U sia fuori che dentro, dati che siano i valori sulle superficie.

P. Pizzetti.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben von D.r H. Burkhardt *und* D.r W. Franz Meyer. *Erster Teil: Reine Mathematik.* I. *Band: Arithmetik und Algebra. Redigiert von* W. Franz Meyer. I Heft, 1898; II Heft, 1899. Leipzig, Teubner. 8.° gr., p. 226 (Prezzo Marchi 3. 40 per fascicolo).

Gli articoli contenuti nei primi due fascicoli della così detta « Enciclopedia delle tre Accademie » si riferiscono tutti a questioni fondamentali dell'analisi algebrica e sono dovuti ai sig.ri Schubert, Netto, Pringsheim, Study, Schönflies e Burkhardt. Essi sono in ge-

(*) *Riemann's Ges. Werke,* Leipzig 1876, p. 270 e seg.

Digitized by Google

nerale quali si potevano ragionevolmente attendere da questi egregi scienziati: se forse l'articolo sui determinanti può sembrare ingiustamente mingherlino (10 pag.) data la vastità del tema, per converso quello sulle serie è così completo da soddisfare le più raffinate esigenze.

In uno a questi due fascicoli venne pubblicato l'indice generale dei primi tre volumi di tutta l'opera; su quello relativo ai due primi (Aritmetica, Algebra, Analisi) nulla di importante vi è da notare; ma sul piano del terzo (Geometria) non posso tacere un'esservazione.

Una enciclopedia, se vuol corrispondere al suo scopo, deve contenere in compendio e buon ordine tutto quello che si conosce sopra un dato tema, possibilmente senza ripetizioni; chi la redige deve ricordare che colui che la consulterà sarà attratto dal desiderio di conoscere anzitutto quali sono le verità conquistate dalla scienza in un determinato tema, e in via secondaria da quello di sapere per quali vie si raggiunsero. Era perciò sicuro che l'ordinamento della materia nella nuova *Enciclopedia* sarebbe stato deliberato assegnando il posto di principale criterio direttivo alla *natura dei risultati;* tanto più che ad esso si era uniformato il sig. W. Franz Meyer nel bellissimo articolo di saggio sulle superficie del III ordine, ove tali importanti figure sono considerate da tutti i punti di vista, sono trattate con tutti i metodi. Tuttavia sembra che nella distribuzione della materia del III Vol. dell'*Enciclopedia* gli egregi direttori non siansi attenuti rigorosamente a tale metodo. Ed infatti quel volume verrà diviso in 4 parti, cioè: A. *Discipline geometriche pure.* B. *Fondamenti per l'applicazioni dell'algebra e dell'analisi alla geometria.* C. *Geometria degli enti algebrici.* D. *Geometria differenziale.* Riguardo a quest'ultima sezione essa corrisponde ad un reale stato di cose, onde tutti ne approveranno la presenza. Quanto alle tre prime, gli argomenti in esse trattati sono:

A. 1. Principì della geometria. 2. Geometria elementare. 3. Divisioni dello spazio e configurazioni. 4. Analysis situs. 5. Fondamenti della geometria projettiva. 6. Geometria descrittiva. 7. Geometria inversionale.

B. 1. Generalità. 2. Metodo delle coordinate. 3. Analisi geometrica.

C. 1. Coniche. 2. Teoria generale delle curve piane algebriche. 3. Curve piane particolari. 4. Quadriche. 5. Teoria generale delle superficie algebriche. 6. Superficie algebriche particolari. 7. Geometria a più dimensioni. 8. Trasformazioni e corrispondenze. 9. Geometria degli elementi superiori dello spazio. 10. Metodi numerativi.

Orbene a noi sembra evidente che molto miglior consiglio sarebbe stato il ridurre a due sole le sezioni A, B, C: ponendo nella prima

Digitized by Google

tutto ciò che si riferisce ai metodi in generale (1) e nella seconda *tutti* i temi in cui essi trovano applicazione; e ciò si sarebbe ottenuto disponendo i capitoli progettati nell'ordine seguente:

Sezione **A**. *Metodi d'indagine geometrica.* A 1. (compresi i principî della geometria elementare). A 5. B 1. B 2. A 6. C 10 (escluse le applicazioni speciali). A 4. A 7. B 3.

Sezione **B**. *Geometria degli enti algebrici.* A 2 (risultati). C 1. C 4. C 2. C 3. C 5. C 6. C 8. A 3. C 9. C 7.

Se ci siamo permessi tali osservazioni e proposte gli è che l'indice pubblicato rappresenta un semplice progetto e le modificazioni da noi suggerite, se fossero accolte, non recherebbero alcuna perturbazione negli studî che stanno da vario tempo compiendo i diversi collaboratorî. D'altronde non è forse dovere di tutti il contribuire, nella misura delle proprie forze, alla buona riuscita di un'opera importante che sarà quasi il testamento matematico del Secolo XIX?

G. L.

A. Capelli. *Lezioni di algebra complementare ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche e matematiche.* II ed. con aggiunte. Napoli, B. Pellerano, 1898, p. XVI + 680, 8°. (Prezzo L. 8,50).

Nella nuova edizione l'ottimo manuale del Prof. Capelli ha conservati i lineamenti generali che aveva quando quattro anni or sono venne per la prima volta pubblicato. Ma l'A. ha introdotte innumerevoli modificazioni di dettaglio che lo rendono ancor più pregevole. Nell'impossibilità di farne qui la completa enumerazione, rileveremo il moltiplicarsi delle *Note ed esercizi*, mediante cui egli riuscì a somministrare ai giovani suoi lettori una quantità di nozioni complementari interessanti, epperò atte a stimolarli verso gli studi più elevati; nè taceremo del nuovo capitolo sulle forme invariantive, la cui opportunità non potrà essere revocata in dubbio da chi rifletta quanto frequenti ed importanti siano le applicazioni di quella teoria. Per queste ragioni siamo sicuri che il pubblico farà buon viso alle *Lezioni* del Prof. Capelli anche in questa seconda edizione, nonchè nelle venture che certamente non mancheranno.

G. L.

(1) Ad es. anche i metodi numerativi, che sono stati messi dopo quegli studî in cui essi trovano le più brillanti applicazioni.

Digitized by Google

Annuaire pour l'an 1899, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. In-18, pag. VI-784 con 2 carte magnetiche. Paris Gauthier-Villars (L. 1.50; franco 1.85).

Questo piccolo volume contiene, come i precedenti della stessa collezione, una quantità di notizie indispensabili allo scienziato ed all'ingegnere. Fra gli articoli scientifici i cultori della matematica applicata noteranno la *Notice sur la géodésie moderne en France* del colonnello Bassot. G. L.

NECROLOGIO

SOPHUS LIE (1)

DI CORRADO SEGRE (2)

Permetta l'Accademia che io richiami brevemente la sua attenzione sulla grave perdita che ora le fu annunziata: quella di chi può dirsi il creatore della grande teoria dei gruppi continui di trasformazioni. A SOPHUS LIE è interamente dovuta questa teoria, così vasta e così profonda, che riguarda ed interessa tutta quanta la matematica. Egli fu che dal principio della sua vita scientifica (1869) sino alla fine — ahi troppo immatura! — ne pose i fondamenti, la sviluppò, ne fece applicazioni, dimostrandone la grande importanza. Egli stabilì i teoremi fondamentali che caratterizzano un sistema continuo di trasformazioni come gruppo. Con felicissima ispirazione introdusse le *trasformazioni infinitesime* per generare i gruppi, e se ne valse per dare a quelle proprietà caratteristiche la più semplice espressione e per rendere più agevoli e più eleganti tutte le ricerche. Svolse per tutti i gruppi continui, colla massima generalità, i principî di una teoria degl'*invarianti differenziali*, dando così il modo di completare e di

(1) Nato a Nordfjordeid, nelle vicinanze di Flöro (Norvegia), il 17 Dicembre 1842. Fu professore all'Università di Christiania dal 1877 al 1886, ed in quest'epoca fondò e diresse l'*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*; poi in quella di Lipsia fino al 1898, anno in cui, cedendo alle istanze del governo norvegese, ritornò in patria per occuparvi una cattedra, creata appositamente per lui, nell'Università di Christiania. L'anemia cerebrale lo spense il 18 Febbraio di quest'anno. [G. L.].

(2) Cenni riprodotti dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino*, seduta del 26 Febraio 1899.

Digitized by Google

estendere l'ordinaria teoria degl'invarianti (projettivi) delle forme algebriche, quella dei parametri differenziali, ecc. Insegnò i metodi per ottenere tutte le varietà invarianti di un gruppo assegnato. Determinò e studiò varie classi speciali di gruppi, ad esempio quelli finiti nei campi delle prime dimensioni: ottenendo pei gruppi ad una variabile il risultato notevolissimo che essi son simili a gruppi projettivi. Ricercò le proprietà interne dei vari gruppi, relative alla loro composizione o *struttura*, fece vedere da quali costanti esse dipendano essenzialmente, e come vengano nel miglior modo illuminate dalla considerazione del così detto *gruppo aggiunto*. Determinò le varie specie di strutture che si possono avere nei gruppi a 2, 3, 4 parametri, ed in altre più ampie classi di gruppi. Infine diede a quella teoria tanti e sì varî concetti e risultati da destare la più profonda ammirazione in chi consideri che sono l'opera di un solo scienziato!

L'indirizzo secondo cui lavorò LIE è da lui stesso caratterizzato come quello che da un lato, seguendo gl'insegnamenti di MONGE, applica all'Analisi i concetti geometrici, e particolarmente quelli introdotti nella Geometria moderna da PONCELET e da PLÜCKER; e d'altra parte estende le idee di LAGRANGE, ABEL e GALOIS sulla trattazione delle equazioni algebriche alla Geometria, ed in particolare alle equazioni differenziali. Dalla arbitrarietà nella scelta dell'ente geometrico che si assume come elemento generatore dello spazio (noto concetto di PLÜCKER) derivò il LIE in tutta la sua generalità la nozione di *trasformazioni di contatto*, delle quali le ordinarie trasformazioni (*puntuali*) son casi particolari. E derivò pure (collegandosi a MONGE) una concezione geometrica delle equazioni differenziali, sì ordinarie che parziali, la quale consiste nel riguardare una tal equazione come rappresentante una varietà infinita di particolari elementi geometrici (quelli stessi a cui si applicano le trasformazioni di contatto), e gl'integrali come varietà inferiori contenute in quella e soddisfacienti a certe condizioni. Per tal modo il problema dell'integrazione prese una forma più generale; scomparvero certe eccezioni o distinzioni di casi; la nozione d'integrale apparve soggetta alla legge geometrica di dualità. Le trasformazioni di contatto ed i gruppi di esse applicati alle equazioni differenziali chiarirono le questioni d'integrabilità di queste; in quanto che appunto il fatto di ammettere un gruppo continuo di trasformazioni in sè è quello che caratterizza l'integrabilità di varie classi di equazioni, o la loro riducibilità ad altre più semplici, a tipi determinati; come la risolubilità ed altre proprietà delle equazioni algebriche derivano dai gruppi di sostituzioni che queste ammettono. Così una trasformazione di contatto che è fra le prime e più belle concezioni di LIE, mutando le rette in sfere, gli servì a mutare la geometria projettiva in una geometria metrica, il problema

Digitized by Google

delle asintotiche di una data superficie in quello delle linee di curvatura. E qui, a proposito della geometria differenziale delle superficie, ricorderò ancora fra varie altre le eleganti ricerche di LIE sulle superficie di traslazione, ed in particolare sulle superficie algebriche d'area minima, non che quelle sulle superficie che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni geodetiche.

Del resto quelle accennate non sono ancora tutte le applicazioni che il LIE ha fatto dei gruppi continui alla geometria. Va rilevata in modo speciale l'applicazione ai *fondamenti* di questa scienza. Poichè nella geometria si può riguardare come dato a priori un gruppo continuo di trasformazioni, quello dei movimenti dello spazio, si può cercare quali postulati si possano ammettere per questo gruppo, tali che se ne deducano quelle proprietà che corrispondono all'ordinaria intuizione dello spazio. È questo il problema che, avviato da RIEMANN e più ancora da HELMHOLTZ, fu poi trattato in modo più corretto e completo da LIE; sì da caratterizzare pienamente l'ordinaria geometria euclidea, non che le geometrie non euclidee.

Le teorie di LIE furono già applicate, oltre che dal loro Autore, da vari altri scienziati a tutti i rami della Matematica. Così il POINCARÉ ha collegato in modo notevole la teoria generale dei numeri complessi a n unità a quella dei gruppi semplicemente transitivi di trasformazioni lineari omogenee; e molte ricerche si son fatte in quest'indirizzo. Il PICARD (e, dopo di lui, il VESSIOT) ha adoperato i gruppi continui finiti per estendere alle equazioni differenziali lineari la teoria di GALOIS delle equazioni algebriche. Altri hanno applicato i risultati di LIE alla Meccanica (ed alla Fisica matematica) con buon successo; com'era prevedibile, chi consideri che anche in questa scienza come nella geometria si hanno equazioni differenziali e forme differenziali quadratiche, da integrare o da trasformare. Le superficie e varietà algebriche con gruppi continui di trasformazioni birazionali o di trasformazioni projettive son pure state in questi ultimi tempi oggetto di studi, in particolare da parte di alcuni giovani geometri italiani. E l'interesse dei matematici per tutte queste applicazioni della teoria dei gruppi va sempre crescendo!

La morte di SOPHUS LIE riesce tanto più dolorosa, perchè l'attività con cui egli, anche in questi ultimi anni, pubblicava sempre nuove ricerche faceva sperare che egli desse ancora per lungo tempo i bei frutti del suo potente ingegno alla scienza! Particolarmente è da deplorare che egli non abbia potuto mantenere la promessa fatta nella sua " Theorie der Transformationsgruppen „ ed altrove di pubblicare altre ampie opere; una delle quali, da fare come quella in collaborazione coll'ENGEL, intendeva dedicare, non più ai soli gruppi finiti, ma a tutti quanti i gruppi continui (definibili con equazioni diffe-

Digitized by Google

renziali), finiti od infiniti, svolgendovi una completa e molto generale teoria degl' invarianti differenziali, ed una trattazione delle equazioni differenziali dal punto di vista dei gruppi di trasformazioni. Sia permesso augurare che l' ENGEL suo valoroso discepolo e fedele collaboratore, riesca a compiere da sè, coi materiali lasciati dal maestro, l' importante lavoro!

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI S. LIE (1)

1. *Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie.* — G. di Crelle. T. LXX, 1869.
2. *Ueber die Reciprocitätsverhältnisse des Reye'schen Complexes.* — Gotting. Nachr. 1870.
3. (Insieme a F. KLEIN.) *Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten.* — Berlin. Monatsberichte 1870; Math. Annalen. T. XXIII, 1884.
4. (Insieme a F. KLEIN). *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces.* — Comptes-rendus, T. LXX, 1870.
5. *Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungstheorie des gewöhnlichen Raumes entspricht.* — Götting. Nachr. 1871.
6. *Zur Theorie eines Raumes von* n *Dimensionen.* — Ivi.
7. (Insieme a F. KLEIN). *Ueber diejenigen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformation in sich übergehen.* — Math. Annalen, T. IV, 1871.
8. *Neue Integrations-Methode partieller Gleichungen erster Ordnung zwischen* n *Variabeln.* — Forhandlingar i Videnskabs Selskabet i Christiania, 1872.
9. *Zur Theorie der Differential-Probleme.* — Ivi.
10. *Kurzes Résumé mehrerer neuen Theorien.* — Ivi.
11. *Zur Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen.* Ivi.
12. *Ueber eine neue Integrations-Methode partieller Differentialgleichungen erster Ornung.* — Götting. Nachr. 1872.
13. *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine Classification derselben.* — Ivi.

(1) Vennero esclusi dal seguente catalogo due o tre lavori scritti in norvegese, i risultati dei quali si ritrovano in altre pubblicazioni del LIE; nonchè i resoconti (per lo più di lavori propri) inseriti nel *Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik.* [G. L.]

Digitized by Google

14. *Ueber Complexe insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendungen auf die Theorie partieller Differentialgleichungen.* — Math. Annalen. T. V, 1872.
15. *Ueber eine Verbesserung der Jacobi-Mayer'schen Integrations-Methode.* — Forh. af. Christiania, 1873.
16. *Zur analytischen Theorie der Berührung-Transformationen.* Ivi.
17. *Ueber partielle Differential-Gleichungen I Ordnung.* — Ivi.
18. *Partielle Differential-Gleichungen I^er Ordnung, in denen die unbekannte Funktion explicite vorkommt* — Ivi.
19. *Neue Integrations-Methode eines 2n-gliedrigen Pfaff'schen Problems.* — Ivi.
20. *Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen.* — Math. Ann. T. VIII, 1874.
21. *Ueber Gruppen von Transformationen.* — Gotting Nachr. 1874.
22. *Zur Theorie des Integrabilitätsfactor.* — Forh. af Christiania, 1874.
23. *Verallgemeinerung und neue Verwerthung der Jacobi'schen Multiplicator-Theorie.* — Ivi.
24. *Allgemeine Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.* — Ivi e Math. Ann. T. IX, 1875.
25. *Discussion aller Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.* — Forh. af Christiania, 1875.
26. *Theorie der Transformations-Gruppen.* — Archiv for Math. og Naturvidenskab. T. I, 1876, T. III, 1878 e T. IV, 1879; Math. Ann. T. XVI, 1880.
27. *Résumé einer neuen Integrationstheorie.* — Ivi.
28. *Theorie des Pfaff'schen Problems.* — Id. T. II, 1877.
29. *Die Störungstheorie und die Berührungs-Transformationen.* — Ivi.
30. *Neue Integrationsmethode der Monge-Ampèreschen Gleichungen.* — Ivi.
31. *Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.* — Math. Ann. T. IX, 1876.
32. *Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen. I. Ueber reelle algebraische Minimalflächen.* — Arch. for Math. T. II, 1877. [Cf. *Berigtigelse,* Forh. af Christiania, 1877].
33. *Petite contribution à la théorie de la surface Steinérienne.* — Id. T. III, 1877.
34. *Sätze über Minimalflächen.* — Id. T. III e IV, 1878.
35. *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung.* — Id. T. IV, 1879, T. V, 1880.
36. *Ueber Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind.* — Ivi.
37. *Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe*

Digitized by Google

ihrer geodätischen Curven. Universitätsprogramm. — Christiania, 1879.

38. *Bestimmung aller in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Differentialgleichung* $s = o$. — Arch. for Math. T. IV, 1879.
39. *Weitere Untersuchungen über Minimalflächen.* — Ivi.
40. *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen.* — Math. Ann. T. XIV e XV, 1879.
41. *Resumé einer Integrationstheorie.* — Forh. af Christiania, 1880.
42. *Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation.* — Bull. de Darboux, 2.e Série, T. IV, 1880.
43. *Discussion der Differentialgleichung* $s = F(z)$. — Arch. for Math. T. VI, 1881.
44. *Ueber die Integration durch bestimmte Integration von einer Classe linearer Differentialgleichungen.* — Ivi.
45. *Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen.* — Ivi.
46. *Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichung*

$$s^2 - rt = \frac{(1 + p^2 + q^2)}{a^2}.$$ — Ivi.

47. *Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten.* — Id. T. VII, 1882.
48. *Untersuchungen über Differentialgleichungen.* — Forh. af Christiania, 1882 e 1882.
49. *Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten.* — Arch. for. Math. T. VII, 1882.
50. *Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden.* — Ivi.
51. *Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Tortionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verknüpft sind.* — Forh. af Christiania, 1882.
52. *Ueber unendliche continuirliche Gruppen.* — Id. 1883.
53. *Klassification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen* x, y, *die eine Gruppe von Transformationen gestatten.* — Arch. Math. T. VIII, 1883, e IX, 1884; Math. Annalen, T. XXXII, 1888.
54. *Ueber Differentialinvarianten.* Math, Ann. T. XXIV, 1884.
55. *Zur Theorie der Transformationsgruppen.* — Ivi, T. IX, 1884.
56. *Ueber die allgemeinste geodätische Abbildung der geodätischen Kreise einer Fläche.* — Ivi.
57. *Bestimmung des Bogenselementes aller Flächen deren geodätische Kreise eine infinitesimale Berührungstransformation gestatten.* — Ivi.

Digitized by Google

58. *Untersuchungen über Transformationsgruppen.* Arch. for Math. T. X, 1884.
59. *Ueber gewöhnliche lineare Differentialgleichungen.* — Forh. af Christiania, 1885.
60. *Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche endliche Gruppe gestatten.* — Math. Ann. T. XXV, 1885.
61. *Bemerkung zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.* — Leipziger Ber. 1886.
62. *Die Begriffe Gruppe und Invariante.* — Id., 1887, American Journal, T. XI, 1888.
63. *Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie.* — Leipziger Ber. 1888 e 1895.
64. *Ein Fundamentalsatz in der Theorie der unendlichen Gruppen.* — Christiania, 1889.
65. *Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Mechanik.* — Leipziger Ber. 1889.
66. *Reduction einer Transformationsgruppe auf ihre kanonische Form.* — Ivi.
67. *Ueber irreducible Berührungstransformationsgruppen.* — Ivi.
68. *Neuer Beweis des zweiten Fundamentalsatzes in der Theorie der Transformationsgruppen.* — Id. 1890.
69. *Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Transformationsgruppen durch ausführbare Operationen.* — Ivi.
70. *Ueber die Grundlagen der Geometrie.* — Ivi.
71. *Die Grundlagen für die Theorie der Geometrie der unendlichen Transformationsgruppen.* — Id. 1891.
72. *Die linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen.* Ivi.
73. *Ueber einige neuere gruppentheoretische Untersuchungen.* — Id. 1892.
74. *Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions.* — Comptes-rendus, T. CXIV. 1892.
75. *Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel.* — Ivi.
76. *Sur les fondements de la géométrie.* — Ivi.
77. *Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.* — Lepziger Ber. 1892.
78. *Untersuchungen über Translationsflächen.* — Ivi.
79. *Ueber die Gruppen der Bewegungen und ihre Differentialinvarianten.* — Id. 1893.
80. *Sur les équations différentielles ordinaires qui possèdent des systèmes fondamentaux d'intégrales.* Comptes-rendus, T. CXVI, 1893.
81. *Ueber Differentialgleichungen, die Fundamentalintegrale besitzen.* — Leipziger Ber. 1893.

Digitized by Google

82. *Zur Theorie der Transformationsgruppen.* — Id. 1894.
83. *Bemerkungen zu Ostwald's Princip des ausgezeichneten Falles.*
84. *Untersuchungen über unendliche continuirliche Gruppen.* — Leipzig. Abhandl., T. XXI, 1895.
85. *Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.* — Leipziger Ber. 1895.
86. *Verwertung des Gruppenbegriffes für Differentialgleichungen.* Ivi.
87. *Ueber seine aus dem Jahre 1874 herrührende Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen.* — Ivi.
88. *Bestimmung aller Flächen, die eine continuirliche Schar von projectiven Transformationen gestatten.* — Ivi.
89. *Influence de Galois sur les développements des mathématiques.* — Le centenaire de l'École normale. Paris, 1895.
90. *Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Optik.* — Leipziger Ber. 1896.
91. *Die Theorie der Translationsflächen und das Abel'sche Theorem.* Ivi.
92. *Zur allgemeinen Transformationstheorie. I. Ueber Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten. II. Einige Bemerkungen über Pfaff'sche Ausdrücke und Gleichungen.* Ivi.
93. *Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen.* — Ivi.
94. *Das Abel'sche Theorem und die Translationsmannigfaltigkeiten.* Id. 1897.
95. *Die Theorie der Integralinvarianten ist ein Corollar der Theorie der Differentialinvarianten.* — Ivi.
96. *Ueber Integralinvarianten und ihre Verwerthung für die Theorie der Differentialgleichungen.* — Ivi.
97. *Liniengeometrie und Berührungstransformationen.* Ivi.
98. *Zur Geometrie einer Monge'schen Gleichung.* — Id. 1898.
99. *Ueber Berührungstransformationen und Differentialgleichungen.* — Ivi.

Theorie der Transformationsgruppen, unter Mitwirkung von F. ENGEL. — Leipzig. Teubner, T. I, 1888; II, 1890; III, 1893.

Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, bearbeitet und herausgegeben von G. SCHEFFERS. — Leipzig. Teubner, 1891.

Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen. Bearbeitet und herausgegeben von G. SCHEFFERS. — Leipzig. Teubner, 1893.

Geometrie der Berührungstransformationen, dargestellt von S. LIE *und* G. SCHEFFERS. — T. I, Leipzig. Teubner, 1896.

Digitized by Google

PROGRAMMI E RIASSUNTI
DI CORSI UNIVERSITARI

UNIVERSITÀ DI BOLOGNA. - CORSO DI GEOMETRIA SUPERIORE.
ANNO 1897-98.

I. — *Introduzione.*

1. — Curve algebriche piane - Generalità - Curve polari - Formule di Pluecker per singolarità ordinarie.

2. — Equazioni di condizione dei punti multipli - Definizione dei punti multipli infinitamente vicini ad un punto multiplo dato, mediante condizioni differenziali: *a*) caso dei punti multipli che si succedono su rami lineari; *b*) caso dei punti multipli sopra rami non lineari - Condizioni imposte dai punti multipli alle curve polari - Dimostrazione del teorema: i punti multipli d'una curva algebrica sono in numero finito.

3. — Condizioni lineari imposte ad una curva algebrica piana - Sistemi lineari - Punti base - Sistemi lineari determinati dal gruppo base, regolari e sovrabbondanti - Varii esempi.

Teoremi di Bertini sui sistemi lineari riducibili e sulle singolarità delle curve d'un sistema lineare.

4. — Corrispondenza proiettiva fra gli elementi (curve) di un sistema lineare del piano, e gli elementi (punti o iperpiani) di uno spazio S_n.

5. — Curve algebriche gobbe di S_3 e di S_n - Generalità.

6. — Trasformazione razionale e birazionale di una curva piana in un'altra - Trasformazione razionale di due piani da cui essa viene subordinata: sua costruzione geometrica, suoi elementi eccezionali.

Decomposizione delle singolarità: *a*) prima trasformazione riducente i punti multipli d'ordine più elevato di una curva data; *b*) riduzione della curva ad un'altra dotata di soli punti doppi a tangenti distinte.

7. — Trasformazioni delle curve piane o gobbe appartenenti a spazi aventi un numero qualunque di dimensioni.

Trasformazione di una curva data in una curva gobba priva di singolarità.

II. — GEOMETRIA SOPRA UNA CURVA ALGEBRICA.

8. — Curve razionali - Principio di corrispondenza - Funzioni razionali e involuzioni lineari - Teorema di Lüroth.

9. — Funzioni razionali sopra una curva e serie linrari g^r_n - Varie trasformazioni di una curva in relazione ad una o più serie lineari di essa - Serie semplici e composte - Esempi.

Digitized by Google

10. — Il discriminante di una funzione razionale sopra una curva - Coincidenze di una g^1_m - Genere.

11. — Serie lineari complete e curve normali.

12. — Operazioni elementari di somma e sottrazione delle serie lineari complete - Teorema del resto (1.ª parte).

13. — I gruppi delle coincidenze di una serie g^r_n appartengono ad una serie lineare $g_{2p-2+2n}$ (*aggiunta di rango 1 alla data*) - Relazione fondamentale:

$$g_{2p-2+2n} - 2g_n = g_{2p-2+2m} - 2g_m.$$

Serie canonica: sua definizione algebrica in relazione al discriminante di una funzione razionale sopra la curva.

14. — Curve aggiunte ad una curva piana - Teorema algebrico fondamentale - Le curve aggiunte segano sopra una curva piana una serie completa - Teorema del resto (2.ª parte).

15. — Serie g^r_n speciali - Teorema di riduzione - Teorema di Riemann-Roch - Corollari ed esempii.

16. — Classificazione delle curve - Curve di genere 0, 1, 2... - Curve iperellittiche - Curve tipiche - Moduli.

III. — Geometria sopra il piano.

17. — Trasformazioni birazionali o cremoniane fra due piani - Relazioni fondamentali - Decomposizione di una trasformazione cremoniana in fattori quadratici.

Applicazione alla riduzione delle singolarità di una curva.

18. — I sistemi lineari di curve piane rimpetto alle trasformazioni cremoniane - Serie caratteristica - Sistema aggiunto.

19. — Riduzione a tipi dei sistemi lineari di curve razionali ed ellittiche - Costruzioni geometrica dei fasci di Halphen.

Riduzione dei sistemi lineari semplici di curve iperellittiche.

20. — Le superficie razionali e i sistemi lineari di curve piane - Studio di alcune rappresentazioni piane di superficie razionali.

21. — Teorema di Kronecker-Castelnuovo sulle superficie le cui sezioni piane tangenti sono riducibili.

Superficie a sezioni razionali: teorema di Picard - Superficie a sezioni ellittiche: teorema di Castelnuovo - Del Pezzo.

22. — Enunciato del teorema di razionalità delle involuzioni piane.

Superficie a sezioni iperellittiche (loro proprietà proiettiva).

23. — Gruppi finiti di trasformazioni birazionali del piano - Procedimento di riduzione di Cantor - I tipi delle involuzioni di Bertini.

24. — Trasformazione [2, 1] tra due piani - Piani doppi - Piani doppi razionali.

Digitized by Google

25. — Teorema di Noether sopra le superficie contenenti un fascio lineare di curve razionali.

26. — Gruppi continui di trasformazioni birazionali del piano. Superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse.

AVVERTENZE. — Il programma sopra indicato fu svolto innanzi a un uditorio di giovani in parte familiari con questioni geometriche. Data la definizione analitica *diretta* delle singolarità superiori ed i teoremi di riduzione, le difficoltà (proiettive, dipendenti dal complicarsi delle singolarità, furono sistematicamente lasciate da parte, ma segnalate all' attenzione degli studiosi.

Il programma (II), relativo alla Geometria sopra una curva, rappresenta un tentativo di fusione dei due indirizzi secondo cui la teoria può essere svolta (vedansi p. e. le monografie dei sig. *Segre* e *Bertini*. Annali di Matematica, 1894), colla tendenza a rilevare maggiormente il contenuto algebrico delle definizioni e dei teoremi. L' esperienza mi ha dimostrato che ciò contribuisce anche alla chiarezza; così p. e. mi sembra che la definizione algebrica delle serie lineari, mediante le funzioni razionali sopra una curva, riesca più luminosa di ogni altra, e conduca nel modo più spedito al teorema fondamentale sulle serie complete — Semplice pure e luminosa, mi sembra la nuova dimostrazione, indicata al n.° 13, per l' invarianza della serie canonica definita in relazione al discriminante di una funzione razionale sulla curva.

FEDERIGO ENRIQUES.

NOTIZIE

I PREMI DELL' ISTITUTO DI FRANCIA. — Nell' adunanza solenne del 19 Dicembre u. s. venne conferito, dall' Accademia delle Scienze di Parigi, il Gran premio delle scienze matematiche (« cercare di estendere la parte rappresentata nell' Analisi delle serie divergenti ») a E. Borel; M. Servant ottenne la menzione onorevole. Il premio Francœur fu dato al Vaschy, il premio Poncelet all' Hadamard, il premio Lalande a S. C. Chandler ed il premio Damoiseau a G. W. Hill. Fu prorogato al 1.° Ottobre 1899 il termine utile per la presentazione dei lavori rispondenti al tema « studiare le questioni relative alla determinazione, alle proprietà ed alle applicazioni dei sistemi di coordinate curvilinee ortogonali a n variabili, indicare in particolare, in modo per quanto è possibile preciso, il grado di generalità di tali sistemi ». Finalmente vennero proposti i seguenti temi pei concorsi dell' anno 1900:

Digitized by Google

Gran premio delle scienze matematiche. « Perfezionare in qualche punto importante la ricerca del numero delle classi delle forme quadratiche a coefficienti interi con due indeterminate » (Scadenza 1.° Ottobre 1900).

Premio Bordin. « Sviluppare e perfezionare la teoria delle superficie applicabili sul paraboloide di rivoluzione ». (Scadenza 1.° Ottobre 1900).

Premio Damoiseau. « Fare la teoria delle comete periodiche di cui furono già osservati parecchi ritorni ». (Scadenza 1.° Giugno 1900).

* * *

DIZIONARIO BIOGRAFICO DEGLI SCRITTORI ITALIANI. — È uscito il fascicolo di saggio di questa pubblicazione, della quale la Società bibliografica Italiana si è fatta editrice, accogliendo il voto formulato nella prima Riunione bibliografica tenutasi a Milano nel Settembre del 1897. Il *Dizionario* conterrà la bio-bibliografia di tutti gli scrittori, nati o vissuti entro i confini geografici d'Italia, dalla caduta dell'Impero romano sino alla metà del Secolo XIX. I singoli articoli saranno compilati da autori differenti, ma con metodo uniforme; ciascuno recherà in calce il nome del compilatore e la data di pubblicazione. Il fascicolo di prova contiene 21 biografie di scrittori di ogni regione e di ogni specialità (notiamo fra essi due matematici: N. Fergola e G. B. Giorgini); esso è stato curato dai professori Novati e Solerti, e compilato da C. Luppi, L. Frati, G. Mercati, L. Torri, G. Sforza, G. Loria, G. Patraglione, G. Saccardo, G. Salvo-Cozzo, oltre il Novati.

* * *

TEMA DI MATEMATICA POSTO A CONCORSO DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE ESATTE, FISICHE E NATURALI DI MADRID: *Studio della deformazione di una lastra elastica rettangolare, soggetta a forze variamente distribuite sulla superficie.* — Navier stabilì le equazioni differenziali dell'equilibrio di una piastra rettangolare nel *Bulletin de la Société Philomatique* del 1823, integrandole soltanto nei casi in cui fossero tenuti fissi i quattro lati od i quattro angoli. Ora l'Accademia desidera che l'integrazione venga eseguita in altri casi, sopra tutto in quelli che presentano applicazione immediata alle costruzioni, sia che non tutto il perimetro sia tenuto fisso, o che le forze siano distribuite in modo non uniforme, o che venga assegnata la posizione del piano tangente in alcuni punti. (Scadenza 31 Dicembre 1900).

I lavori dovranno essere scritti in castigliano od in latino, e presentati anonimi. Al migliore di essi verrà assegnato un premio di 1500 *pesetas* ed una medaglia d'oro; al seguente in merito l'*accessit* consistente in una medaglia; ed al terzo una menzione onorevole.

Digitized by Google

* * *

MODELLI DI MATEMATICA. — L'eccellente collezione che diede tanta celebrità alla casa L. Brill di Darmstadt si è accresciuta di recente dei seguenti modelli:

Serie XVII. *Modelli relativi alla teoria delle funzioni*: N. 5. Sistemi ortogonali sulla sfera. N. 6. Le divisioni regolari della sfera corrispondenti ai poliedri regolari.

Modelli relativi alla teoria delle superficie. Varî tipi di punti conici; indicazione del modo in cui procedono la curva parabolica e le curve asintotiche nelle vicinanze di essi.

Modelli relativi alla fisica matematica. N. 8. Modelli che illustrano le variazioni di forma delle corde vibranti. N. 9. Modelli sulla teoria della distribuzione del calore in un'asta od in un anello.

Aggiunta alla IX Serie. Superficie di Steiner « con alcune assintotiche ».

Aggiunta alla XX Serie. Modelli di superficie elicoidali chiuse.

È poi annunciata, dalla Casa Schrœdel e Simon di Halle la confezione di una *Raccolta di modelli di cinematica* dovuta al Prof. D.r Fr. Schilling; quanto essa prometta di riuscire interessante risulta dalla semplice indicazione, che qui diamo, di ciò che essa conterrà:

I gruppo. 1. Generazione delle trocoidi positive come epitrocoidi. 2. Generazioni delle trocoidi positive come peritrocoidi. 3. Generazione delle trocoidi negative come ipotrocoidi a centro libero. 4. Generazione delle trocoidi negative come ipotrocoidi a centro coperto.

II. Gruppo. 5. Generazione di ellissi e segmenti. 6. Generazione di evolventi di circolo. 7. Generazione di cicloidi.

III Gruppo. 8 e 9. Manovelle.

IV Gruppo. 10, 11, 12. Inversori Peaucellier, Hart e Sylvester-Kempe. Prezzo totale Marchi 168.

* * *

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE. — È questo il titolo di una rivista internazionale pubblicata da C. A. Laisant e H. Fehr sotto il patronato di una commissione costituita da spiccate individualità di tutti i paesi: in essa, infatti, figurano: Appell, Bougaiev, M. Cantor, Cremona, Czuber, Galdeano, Greenhill, Klein, Liguine, Mansion, Mittag-Leffler, Oltramare, Petersen, Picard, Poincaré, Schoute, Stephanos, Teixeira, Vassilief e Ziwet. Scopo del nuovo periodico è di stabilire una incessante corrispondenza fra le persone che dedicano la loro vita all'educazione della gioventù.

Il *Bollettino* augura al nuovo confratello vita lunga e prospera!

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1899.

Digitized by Google

Luglio, Agosto e Settembre 1899.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*. Università di Genova.

SOMMARIO

R. Bonola, *Bibliografia sui fondamenti della Geometria in relazione alla geometria Non-Euclidea.*

Recensioni ed annunzi: Meray. *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques.* IV. *Partie. Applications géométriques classiques* [G. L.]. G. Vivanti. *Corso di calcolo infinitesimale* [G. M. Piuma]. — J. H. Graf. *Der Mathematiker Jacob Steiner von Utzenstorp. Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen* — J. Langen *Jacob Steiner's Lebensjahre in Berlin* [G. L.]. — Cesaro. *Elementi di calcolo infinitesimale, con numerose applicazioni geometriche* [G. Vivanti]. — J. Tannery et J. Molk. *Eléments de la théorie des fonctions elliptiques*, T. III. *Calcul integral (1. partie)* [G. L.] — W. Nernst und Schoenflies. *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurz gefasstes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie* [P. Pizzetti]. — M. Simon. *Analytische Geometrie des Raumes* [G. L.]. — E. Czuber. *Vorlesungen über Differential- und Integral-Rechnung* [G. Vivanti]. — M. Cantor. *Politische Arithmetik, oder die Arithmetik des täglichen Lebens* [G. L.] — G. Vivanti. *Teoria dei gruppi di trasformaz. Lezioni di Analisi superiore fatte nella R. Università di Messina* [G. L.]. — G. Oltramare. *Calcul de généralisation* [G. L.]. — G. Fano. *Lezioni di Geometria non euclidea* — G. Nedelec. *Le calcul vectoriel et ses applications en géométrie et en mécanique.*

Programmi e riassunti di corsi universitari. *Università di Pisa. Corso di Geometria superiore, 1898-99* (*Prof.* E. Bertini).

Notizie: *Per la teoria dei numeri primi. — Tema di matematica. — Ristampe. — Seconda conferenza Cesaro sulla letteratura scientifica. — Per favorire le ricerche sul calc. geom. — Concorso bandito dall'Acc. di Tolosa. — Due risurrezioni. — I figli di C. F. Gauss.*

BIBLIOGRAFIA

sui Fondamenti della Geometria in relazione alla Geometria Non-Euclidea

compilata da Roberto Bonola

(Continuazione. Vedi pag. 40).

DISTANZA FINITA (*).

A differenza delle ricerche di Riemann, che caratterizzano la geometria d'una varietà mediante l'espressione della distanza elementare fra due punti infinitamente vicini, quelle raggruppate in questa cate-

(*) Del presente gruppo di lavori non è fatto parola nella introduzione, perchè solo in seguito alla pubblicazione della prima parte di questa *Bibliografia* risolsi tener separato quanto riguarda la distanza finita.

Digitized by Google

goria tendono allo stesso risultato partendo dal concetto e dalle proprietà della distanza finita.

Il Sig. *De Tilly* (1878-1892), esprimendo (nel caso delle tre dimensioni) che una fra le dieci mutue distanze che determinano cinque punti arbitrari dello spazio dipende dalle rimanenti, secondo una legge che non varia col gruppo di punti considerato, riduce il problema di assegnare l'espressione della distanza (caratteristica nelle tre forme di spazio) ad una questione di analisi funzionale.

Il Sig. Minkowski (1896) invece, a rappresentare la distanza di due punti A, B, assume direttamente una funzione S (A, B) omogenea di primo grado nelle differenze delle coordinate di A, B e soddisfacente alla relazione

$$S(A, B) + S(B, C) \geq S(A, C).$$

Una tale funzione, tenuto fisso il punto A, uguagliata a costante fornisce l'equazione d'una superficie in nessun punto concava (corrispondente alla sfera dello spazio euclideo) ed il sistema geometrico, che in tal guisa viene determinato, pur essendo compatibile con la geometria proiettiva, nel senso che alle geodetiche corrispondono equazioni lineari, non ammette che un gruppo ∞^3 di movimenti.

Ai lavori di Minkowski si riattacca poi il risultato dell'Hilbert, che stabilisce essere la metrica dedotta dalla proiettiva prendendo come assoluto, anzichè la quadrica di Cayley, una superficie in nessun punto concava, la metrica più generale, in cui la retta gode della duplice proprietà di essere geodetica ed avere lunghezza infinita.

Accanto ai lavori di cui sopra abbiamo parlato enumeriamo, nel seguito, anche quelli che si riferiscono a relazioni esistenti fra mutue distanze di un gruppo di punti nella geometria euclidea e non euclidea, che costituiscono il punto di partenza delle ricerche del Sig. De Tilly.

Busche E. — *Ueber eine rationale nicht-euklidische Massbestimmung in der Ebene.* (Hamb. Mittheilungen, 3, 1892).

Cayley A. — *On a Theorem in the Geometry of Position.* (Cambridge Jour. II, 18; Coll. Math. Papers, I).

Carnot L. N. — *Mémoire sur la rélation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un essai sur la théorie des transversales.* (Paris, 1806).

Goedseels. — *Conditions de realité des coordonnées.* — Nota V all'« Essai de géométrie analytique générale » di de Tilly. (Vedi de Tilly).

Lagrange I. L. — *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires.* (Mem. Acc. scienze di Berlino, 1773; Oeuvres complètes, III).

Digitized by Google

HILBERT. — *Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte.* (Math. Ann., XLVI, 1895).

MANSION P. — *Demonstration du fait que les déterminants (8) et (9) satisfont à la condition des six points.* — Nota II all'« Essai de géométrie analytique générale » di de Tilly (Vedi de Tilly).

Id. *Relation entre les distances de cinq ou six points en géométrie non euclidienne.* (Brux. S. sc., T. XV, A, 1890-91, XIX. B, 1895).

Id. *Nouvelle forme de la relation entre les distances de cinq points en géométrie non euclidienne.* (Brux. S. sc., XX, A, 1896).

MINKOWSKI H. — *Geometrie der Zahlen.* — Erste Lieferung (Leipzig, B. G. Teubner, 1896).

ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE. — *Traité de Géométrie.* — 6.ª edizione, 2.ª parte, Nota 1.ª (Paris, 1891).

SCHERING E. — *Die Schwerkraft im Gaussischen Raume* (Göttingen Nachr. 1870).

Id. *Linien, Flächen und höhere Gebilde im mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen.* (Gottingen Nachr. 1873).

TILLY (de) J. — *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique.* (Bordeaux, Mém. III, 1.er cahier, 1878).

Id. *Essai de Géométrie analytique générale — Introduction à son travail destiné aux Mémoires.* (Bull. Acc. R. Belgique; (3), XXIII, 1892).

Id. *Essai de Géométrie analytique générale.* (Mémoires couronnés, Belgique, XLVII, 1892-93).

INDIRIZZO PROIETTIVO.

La deduzione sistematica delle proprietà metriche dalle grafiche, iniziata dal Laguerre (1853) e dal Faure (1859), forma il punto di partenza della *metrica proiettiva* del Cayley (1859).

Fondata la Geometria proiettiva, indipendentemente da qualsiasi concetto di misura (Staudt, Klein, Lüroth, Zeuthen, Pasch, ecc.....), si deducono le proprietà metriche delle figure a mezzo di una *quadrica fondamentale*, fissata come *assoluto*. A seconda poi che l'assoluto è una quadrica a punti ellittici, una quadrica immaginaria ovvero una quadrica degenere come in viluppo, si ottengono la geometria di Lobatcheffsky, quella di Riemann, quella d'Euclide, che il Klein denomina rispettivamente *geometria iperbolica, ellittica, parabolica.*

In tale ordine di idee vanno perciò notate le ricerche tendenti al *completamento dello spazio*, di cui è data inizialmente una regione limitata, a mezzo degli *elementi ideali* od *impropri;* quelle che si riferiscono al teorema fondamentale della proiettività (teorema di Staudt); infine quelle che si riferiscono alla introduzione delle coordi-

Digitized by Google

nate proiettive. I lavori qui classificati portano un contributo alle anzidette questioni o si riferiscono alla deduzione di qualche proprietà metrica particolare od allo sviluppo di nuove e più generali metrico-proiettive.

AMODEO. — *Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di un S_r.* (Torino, Atti, XXVI, 1891).

Id. *Sulla introduzione alla Geometria proiettiva.* (Giorn. Mat., XXXIV).

ASCHIERI F. — *La trasformazione quadratica doppia di spazio e la sua applicazione alla geometria dello spazio non euclideo.* (Rend. Ist. Lomb. (2), XIV, 1881; XV, 1882).

Id. *Geometria proiettiva e descrittiva.* — Vol. I, Geometria proiettiva. (Milano, Hœpli, I ed. 1884; II, 1888).

BALL R. S. — *On the theory of Content.* (Dublin Trans. XXIX, 1888).

BATTAGLINI G. — *Nota sui circoli della Geometria non Euclidea.* (Giorn. Mat. XII, 1874).

Id. *Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche.* (Giorn. Mat. XII, 1874).

Id. *Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle quadriche.* (Giorn. Mat. XII, 1874).

Id. *Sull'affinità circolare non euclidea.* (Giorn. Mat. XVI, 1876).

Id. *Sulle forme ternarie quadratiche.* (Napoli, Atti, 1876).

BUSCHE E. — *Ueber eine rationale nicht-Euklidische Massbestimmung in der Ebene.* (Hamb. Mitt., 3, 1892).

CAYLEY A. — *On some Analytical Formulae and their application to the Theory of Spherical Coordinates.* (Cambridge Journ., I, 1846); ovvero: Collected Math. Papers, T. I).

Id. *Chapters in the analytical Geometry of n Dimensions.* (Cambridge Journal, IV, 1845; ovvero: Collected Math. Papers. vol. I).

Id. *A sixt Memoir upon Quantics.* (Phil. Trans. CXLIX, 1859; Coll. Math. Papers, vol. II).

Id. *Note on Lobatchewsky Imaginary Geometry.* (Phil. Mag. XXIX, 1856; Coll. Math. Papers, vol. V).

Id. *A Memoir on abstract Geometry.* (Phil. Trans. CLX, 1870; Coll. Math. Papers, vol. VI).

Id. *On the Non-Euclidian Geometry.* (Math. Ann. V, 1872; Coll. Math. Papers, vol. VIII).

Id. *On the Non-Euclidean plane Geometry.* (Proc. R. S., XXXVII, 1884; Coll. Math. Papers, vol. XII).

Id. *Non-Euclidean Geometry.* (Cambridge Proc., VII, 1890; Cambridge Trans., XV, 1892; Coll. Math. Papers, vol. XIII).

Digitized by Google

CLIFFORD W. — *Analitical metrics* (1864). Quart. Journ. n.° 25, 29, 30; Mathematical Papers, n.° XI).

Id. *On the Theory of Distance*. (Math. Papers, n.° XVI).

Id. *Preliminary Sketch of Biquaternions*. (Proc. L. M. S., IV, 1873; Math. Papers, n.° XX).

Id. *Further note on Biquaternions (Elliptic space)* (Math. Papers, n.° XLII).

CREMONA. — *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie*. (Lincei, Atti, (2), III, 1876).

DARBOUX — *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires* (Paris, Gauthier-Villars, 1873).

Id. *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective*. (Math. Ann. XVII, 1880).

DE PAOLIS R. — *La trasformazione piana doppia di second'ordine e la sua applicazione alla geometria non-euclidea*. (Lincei, Mem. (3), II, 1878).

Id. *Sui fondamenti della geometria proiettiva*. (Lincei, Mem., IX, 1880-81).

Id. *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali*. (Mem. Soc. XL, II, 1892).

ENRIQUES F. — *Sui fondamenti della geometria proiettiva*. (Rend. Ist. Lombardo (2), XXVII, 1894).

Id. *Conferenze di Geometria* — § 20, 21, 22. (Vedi Enriques, indirizzo differenziale).

Id. *Lezioni di Geometria proiettiva* — (Bologna, Zanichelli, 1898).

FANO G. — *Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*. (Giorn. Mat. XXX, 1892).

Id. *Lezioni di Geometria non-Euclidea*. — Cap. VI, VII, VIII. (Università di Roma, lezioni litografate, 1898).

FANO ed ENRIQUES. — *Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva*. (Palermo, Rendiconti IV, 1895).

FAURE. — *Transformation des propriétés métriques des figures*. (Nouv. Ann., T. XVII-XIX, 1858-60).

FIEDLER G. — *Ueber die projectivischen Coordinaten*. (Wolf. Zeitschr., XV, 1870).

Id. *Die darstellende Geometrie*. (I ed., Leipzig, B. G. Teubner, 1871. Trad. italiana di E. Padova e A. Sayno. Firenze, Lemonnier, 1874).

Id. *Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen* (Leipzig, 1872).

FONTENÉ, M. G. — *L'hyperspace a* n-1 *dimensions*. (Paris, 1892).

Id. *Géométrie dirigé*. (Paris, 1896).

Digitized by Google

FONTENÉ, M. G. — *Métrique anivolutive* (Bull. S. M. F. XXVI; 1898).

FRAMM W. — *Habilitationsschrift.* (Tübingen, 1873).

Id. *Ueber die Erzeugung der Curven dritter Classe und vierter Ordnung.* (Zeits. f. Math. XVIII, 1873).

HILBERT — *Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte* (Vedi Hilbert, Distanza finita).

KILLING W. — *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analitischer Behandlung.* (Vedi Killing, indirizzo differenziale).

Id. *Zur projectiven Geometrie.* (Math. Ann., XLIII, 1893).

Id. *Einführung in die Grundlagen der Geometrie.* (Padeborn 1893-1898. Vedi Killing, indirizzo differenziale).

KLEIN F. — *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* (Gött. Nachr. 1871; Math. Ann., IV, 1871; Bull. Sc. Math. II, 1871).

Id. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* (Vedi Klein, indirizzo gruppale).

Id. *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie.* (Math. Ann., V, 1872).

Id. *Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen.* (Math. Ann., V, 1872).

Id. *Ueber die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie.* (Math. Ann. VI, 1873).

Id. *Nachtrag zu dem zweiten Aufsatze ueber nicht-Euklidische Geometrie.* (Math. Ann., VII, 1874).

Id. *Zur nicht-euklidischen Geometrie.* (Math. Ann., T. XXXVII, 1890). (Vedi Klein, indirizzo differenziale).

Id. *Vorlesungen ueber die nicht-Euklidische Geometrie.* (Vedi Klein, indirizzo differenziale).

Id. *Ueber die geometrische Definition der Projectivität auf Grundgebilden erster Stufe.* (Math. Ann., XVII, 1880).

KLEIN-FRICKE. — *Vorlesungen ueber die Theorie der automorphen Functionnen.* I. Bd. (Leipzig, Teubner, 1897).

KŒNIGS G. — *Sur les proprietés infinitesimales de l'espace réglé.* Paris, 1882).

Id. *La géométrie réglée et ses applications.* (Paris, Gauthier Villars, 1895).

LAGUERRE. — *Note sur la théorie des foyers.* (Nouv. Ann., XII, 1853).

LIE, S. — *Ueber Complexe, insbesondere Linien-und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen.* (Math. Ann., V, 1872).

LINDEMANN F. — *Vorlesungen ueber Geometrie unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch.* — Zweiten Bandes, erster Teil (Teubner, Leipzig, 1891).

Digitized by Google

LÜROTH J. — (Ved. Klein: *Nachtrag zu dem ecc....*, indirizzo proiettivo).
Id. *Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen*, I Abh. (Math. Ann., VIII, 1875). II Abh. (Math. Ann. XI, 1877).
OVIDIO (d') E. — *Studio sulla Geometria proiettiva.* (Ann. Mat. (2), VI, 1874).
Id. *I complessi e le congruenze lineari nella Geometria proiettiva.* (Ann. Mat. (2), VII).
Id. *Sopra alcuni luoghi ed inviluppi di 1.° e 2.° grado in Geometria proiettiva.* (Napoli, Rend. VII, 1875).
Id. *Le serie triple e quadruple di complessi lineari nella Geometria metrico-proiettiva.* (Lincei, Atti (2), III, 1876).
Id. *Sulle reti di complessi lineari nella Geometria metrico-proiettiva.* (Lincei, Atti (2), III, 1876).
Id. *Alcune proprietà dei complessi e delle congruenze lineari in Geometria proiettiva.* (Lincei, Atti (2), III, 1875-76).
Id. *Alcune proprietà metriche dei complessi e congruenze lineari in geometria proiettiva.* (Lincei, Atti, (2), III, 1876).
Id. *Le proiezioni ortogonali nella Geometria metrico-proiettiva.* (Torino, Atti, XI, 1876).
Id. *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante.* (Lincei, Mem. (3), I, 1877; Trad. francese, Math. Ann., XII, 1877).
Id. *Le proprietà focali delle coniche nella metrica proiettiva.* (Torino, Atti, XXVI, 1891).
Id. *Sulle coniche confocali nella metrica proiettiva.* (Torino, Atti, XXVI, 1891).
Id. *Teoremi sulle coniche nella metrica proiettiva.* (Torino, Atti, XXVI, 1891).
Id. *Su varie questioni di metrica proiettiva.* (Torino, Atti, XXVIII, 1893).
PASCH M. — *Vorlesungen ueber neuere Geometrie.* (Leipzig, Teubner, 1882).
Id. *Ueber die projective Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde.* (Math. Ann., XXX, 1887).
PIERI M. — *Sui principi che reggono la geometria di posizione.* — Nota 1.ª, 2.ª, 3.ª (Torino, Atti, XXX, XXXI, 1895-96).
Id. *Sugli enti primitivi della geometria proiettiva astratta.* (Torino, Atti, XXXII, 1897).
Id. *Intermezzo.* (Periodico di Mat., XII, 1897).
Id. *I principi della geometria di posizione, composti in un sistema logico deduttivo.* (Torino, memorie, (2), XLVIII, 1897).
Id. *Nuovo metodo di svolgere deduttivamente la geometria proiettiva.* (Rend. Ist. Lomb. (2), XXXI, 1898).

Digitized by Google

REYES Y PRÒSPER. — *Sur la Géométrie non Euclidienne.* (Math. Ann., XXIX, 1887).

REYE T. — *Geometrie der Lage.* — (II ed., Hannover, 1877; III ed., Leipzig, 1886; IV ed., Leipzig, 1899; Trad. francese di O. Chemin, Dunod, Paris, 1881).

SALMON-FIEDLER. — *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, vol. 2.°, cap. XX « Analytische Grundlagen der Metrik ». (IV ed., Leipzig, Teubner, 1878).

Id. *Analytische Geometrie des Raumes* (Leipzig, Teubner, 1874).

SCHUR F. — *Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie.* (Math. Ann., XVII, 1880).

Id. *Ueber die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie.* (Math. Ann., XXXIX, 1891).

Id. *Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie.* (Math. Ann., LI, 1898).

SEGRE C. — *Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie.* (Torino, Atti, XX, 1883-84).

STAHL H. — *Ueber die Massfunctionnen der analitischen Geometrie.* (Berlin, 1873).

STAUDT. — *Geometrie der Lage.* (Nürnberg, Verlag der Fr. Korn'schen Buchhandlung, 1847; trad. italiana — Torino, Bocca, 1889).

Id. *Beiträge zur Geometrie der Lage.* (1856-60).

STORY W. E. — *On non Euclidian properties of conics*: (Am. Jour., XI, 1883).

STUDY. — *Ueber Distanzrelationen.* (Zeits. f. Math. XXVII, 1882).

TIRELLI. — *Le fonti della geometria di Euclide.* (Napoli, 1884-86).

Id. *Saggio di geometria metrico-proiettiva.* (Salerno, 1888).

WIENER H. — *Weiteres über Grundlagen und Aufbau der Geometrie.* (Deutscher Math. Ver., III, 1894).

ZEUTHEN. — (Vedi Lüroth).

Id. *Sur le fondament de la Géométrie projective.* (Comptes Rendus, CXXV, 1897, e CXXVI, 1898).

RECENSIONI ED ANNUNZI

CH. MÉRAY. *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques. — IV. Partie. Applications géométriques classiques.* Paris. Gauthier-Villars, 1898, p. XI + 248, 8.° (Prezzo L. 7).

È costume assai diffuso tra gli espositori dell' analisi infinitesimale l' intercalare, fra le teorie proprie a questo ramo della matematica,

Digitized by Google

le applicazioni che esso riceve alla scienza dell'estensione figurata. Tale sistema corrisponde al fatto che il calcolo infinitesimale fu concepito nell'intento di sciogliere i più difficili problemi di geometria e di meccanica; ed è indubbiamente consigliato dai risultati dell'esperienza, che insegna nulla essere più idoneo al fare prendere allo studente interesse per una disciplina astratta quanto il mostrarne l'uso in qualche ricerca geometrica. Tuttavia il sistema opposto ha esso pure dei rilevanti vantaggi; escludendo, infatti, dal corpo di una dottrina algebrica ogni considerazione geometrica, ci si rende immuni dal pericolo di introdurre in essa qualsiasi considerazione estranea che ne renderebbe meno completa la purezza; inoltre, rimandando tutte le applicazioni al termine di una teoria, si è sicuri di avere a propria disposizione i mezzi per risolvere *tutte* le questioni che s'incontrano svolgendo nel loro ordine naturale *tutte* le proprietà di qualsivoglia figura, e di non essere costretti a interrompere lo studio di questa per riprenderlo più tardi quando si sarà in grado di esaurirlo. Furono certamente questi rilevanti vantaggi che consigliarono il sig. Méray — che, fra i Francesi, è indubbiamente il più eminente degli analisti « puri » — a rimandare al termine delle sue lodatissime *Leçons nouvelles* (1) tutte le applicazioni, scusandosi quasi, nell'esordio del volume che annunciamo, di aver accordato un posto in un libro di analisi ad argomenti estranei a questa. Il perdono che egli chiede gli verrà indubbiamente accordato da tutti coloro che, studiando tale volume, vi ravviseranno delle doti che gli danno diritto ad un posto elevatissimo fra le opere congeneri. Prima di indicarne il piano, notiamo che il Méray, il quale, sin dal 1874, si era fatto fautore della fusione della planimetria con la stereometria (2), ha ulteriormente svolto questo metodo nell'opera che annunciamo, considerando (per dirlo in breve) la geometria piana come caso particolare della geometria dello spazio: si ottiene in tal modo un considerevole risparmio di tempo, senz'alcun sagrificio di chiarezza.

Il Cap. I è quasi un'introduzione: ivi sono esposte generalità intorno alle varie rappresentazioni analitiche di cui sono suscettibili le curve e le superficie e quindi le applicazioni dell'integrazione alla determinazione di lunghezza, di aree e di volumi. Per converso il Cap. II è, si può dire, le chiave di volta di tutto l'edificio eretto dall'A.: esso ha per tema i contatti in generale, tema estremamente delicato, che il Méray tratta da vero maestro; la generalità e l'astrattezze delle considerazioni lo renderanno un po' ostico al principiante;

(1) Ricordiamo che i tre primi volumi avevano risp. per temi: I. *Principes généraux* (1895). II. *Etude monographique des principales fonctions d'une variable* (1895). III. *Questions analytiques classiques* (1897).

(2) *Nouveaux éléments de géométrie* (Paris, 1874).

Digitized by Google

ma, quando egli abbia superate le difficoltà che presenta, può considerarsi implicitamente padrone di tutta l'opera. Dei risultati conseguiti l'A. fa subito uso nel Cap. III, nello stabilire le formule principali relative ai piani tangenti delle superficie, ai piani osculatori delle linee gobbe, alle rette tangenti delle linee piane, segnalando gli altri elementi la cui considerazione in conseguenza s'impone nella varietà a due dimensioni o ad una. Altra applicazione del Cap. II è offerta dalla teoria degli inviluppi di linee e superficie, che l'A. insegna nel Cap. IV, con tutta l'ampiezza che l'importanza del tema esige. Alle stesse considerazioni vien collegata (Cap. V) la teoria delle rette e dei piani normali a superficie e curve, riguardando tali rette e tali piani come luoghi dei centri di sfere tangenti alla varietà considerata; le proprietà delle une e degli altri, nonchè delle trajettorie ortogonali, vengono svolte sino a raggiungere quello che è certo il più bello dei teoremi che vi si riferiscono, cioè il teorema di Malus-Dupin, che dice: se dai raggi luminosi rettilinei normali ad una superficie, subiscono quante si vogliano riflessioni o rifrazioni, essi diventano normali ad un'altra superficie. — Esaurito così quanto concerne i contatti di primo ordine, innanzi di occuparsi dei contatti superiori, l'A. fa una digressione (Cap. VI) sulle proprietà principali delle superficie che s'incontrano più di frequente (cilindri e coni, sviluppabili (1), rigate, superficie di rivoluzione), quindi si volge al cerchio osculatore ed alla sfera osculatrice di una curva, collegandovi le nozioni di curvatura e torsione, nonchè la teoria delle evolute. Tutto ciò nel Cap. VII intitolato « contatti d'ordine superiore d'una linea con il cerchio e la sfera ». Nell'ultimo, dedicato alle « questioni connesse ai contatti di second'ordine d'una superficie col cerchio e la retta », si apprende quello che si sa di essenziale intorno alla teoria della curvatura della superficie, sino al teorema di Dupin sui sistemi tripli ortogonali inclusivamente. Descrivere tutto il contenuto di questi densi capitoli ci è impossibile, come ci è impossibile dare un'idea adeguata dell'eleganza e simmetria dei calcoli, del rigore e semplicità dei ragionamenti, della chiarezza e venustà dello stile. L'egregio A. ci conceda soltanto di rivolgergli due semplici osservazioni di dettaglio. I. La definizione di linea da cui parte (n. 8) non è abbastanza generale. Infatti Kronecker ha dimostrato (2) che una varietà algebrica a $N < n$ dimensioni in uno spazio a n è rappresentabile in generale con $n + 1$ equazioni algebriche simultanee, onde, in particolare, una curva algebrica del nostro spazio ha come rappresentazione più generale un sistema di 4 equazioni si-

(1) Trattando di queste, il Meray dà uno interessantissimo riassunto della teoria dell'applicabilità delle superficie le une sulle altre.

(2) Nel § 10 de' suoi *Grundzuge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grossen* (Journ. für Math., T. XCII, 1882).

Digitized by Google

multanee; tale numero può assai spesso diminuirsi, ma può talora essere raggiunto (1); perciò il sistema

$$f_1(x, y, z) = 0, \; f_2(x, y, z) = 0$$

non deve assumersi come rappresentazione generale di tutte le curve gobbe, tranne quando si tratti di considerazioni concernenti una semplice porzione di curva (p. es. nella teoria dei contatti, p. 66, e seg.). In conseguenza nel n. 15 non può ritenersi risolto in tutta la sua generalità il problema di trovare l'equazione delle superficie passanti per una data curva. — II. Nel n. 151 l'A. stabilisce l'equazione differenziale delle superficie $z = f(x, y)$ sviluppabili, ed osserva che essa esprime la proprietà seguente: in ogni punto di una superficie sviluppabile le due asintotiche coincidono. Ora, siccome egli trovò già (n. 79) che le asintotiche uscenti da un punto della superficie $F(x, y, z) = 0$ sono determinate come intersezioni di un cono e di un piano, dei quali egli ottenne le equazioni, così per avere l'equazione differenziale a cui soddisfa la funzione F, nel caso in cui la superficie $F = 0$ sia sviluppabile, basta scrivere che quel cono è toccato da quel piano. L'equazione risultante si presenta sotto forma elegantissima non solo, ma, per la sua completa generalità, meritevole di venire segnalata.

L'A. si serve in tutto il corso della sua opera di coordinate cartesiane (non sempre ortogonali): ma in un'appendice segnala le formole principali che permettono l'impiego di coordinate polari.

Il volume che abbiamo analizzato non è un completo trattato di geometria infinitesimale: il titolo stesso che vi pose l'A. ed alcune esplicite dichiarazioni assicurano che egli volle semplicemente gettarne i fondamenti. Ora noi crediamo che tale intento egli abbia perfettamente raggiunto, essendo convinti che chiunque siasi assimilate le dottrine da lui esposte, sarà in grado di affrontare lo studio delle parti più elevate di quell'importantissimo ramo delle matematiche a cui è dedicato il volume di chiusa delle eccellenti *Leçons* del sig. Méray.

G. Loria.

Giulio Vivanti. *Corso di calcolo infinitesimale.* Messina, Trimarchi, 1899, 8.°, p. 576 (Prezzo L. 8).

Questo corso di calcolo infinitesimale è il primo, stampato in Italia (2), in cui non sia mantenuta la consueta divisione, per la quale si svolge

(1) Cf. una nota di K. Vahlen in Journ. f. Math., T. CVIII, 1891, p. 316.

(2) Il nostro Egregio Collaboratore intende parlare soltanto di trattati *moderni*. Ma risalendo alla nostra letteratura del secolo XVIII troviamo le *Institutiones analyticae a* V. Riccato et H. Saladino *collectae* (Bononiae, MDCCLXV-LVII), ove è felicemente operata la fusione tra le due sezioni in cui Eulero divise il calcolo infinitesimale, ove l'antico concetto di ordinare la materia in base alla conside-

Digitized by Google

dapprima il calcolo differenziale colle sue applicazioni geometriche e poi l'integrale seguito esso pure dalle sue, divisione non giustificata dalla maggior difficoltà, nei concetti fondamentali, dell'uno di questi calcoli in confronto dell'altro, avendo entrambi per base il concetto di limite. Il far precedere la definizione di integrale definito e le sue conseguenze immediate a quella di derivata, oltre a considerevoli vantaggi, è conforme allo sviluppo storico della scienza; poichè, negli studi geometrici, la considerazione del limite di somme, come a tutti è noto, ha preceduto, di non pochi secoli, quella del limite di rapporti.

Lo svolgimento simultaneo poi delle nozioni appartenenti ai due calcoli, prima ancora delle loro applicazioni geometriche oltre al permettere di profittare del sussidio che si possono dare l'un l'altro, e ad un tempo di rendere più interessante e più concisa l'esposizione delle suddette loro applicazioni, a mio avviso, giova non poco, venendo così presentato il calcolo infinitesimale come un tutto omogeneo, ad imprimere più profondamente e con maggiore chiarezza, nella mente de' giovani studenti, i suoi principî fondamentali ed a facilitar loro l'uso de' suoi metodi nella soluzione dei problemi che incontreranno nelle applicazioni di questa scienza. La fusione dei due calcoli, come giustamente osserva l'Autore « è molto utile anche dal punto di vista » didattico, giacchè portando a conoscenza degli allievi, il concetto di » integrale sin dal principio del corso, permette di esercitarli nell'in- » tegrazione assai più a lungo di quanto fosse possibile nel vecchio » sistema ».

La molta materia, condensata nel piccolo spazio delle 576 pagine di questo volume, è esposta non perdendo mai di vista il profitto degli studenti, scopo precipuo di questo corso, e perciò le dimostrazioni delle quali in esso vien fatto uso, sono chiare, possibilmente brevi, e generalmente precise (1) quali si confanno a giovani studenti.

Questo corso è elementare nel più stretto senso della parola, ed in esso nulla si trova che non rivesta pienamente il carattere di elementarità. Non vi si fa parola, nè di serie nè di prodotti infiniti a termini variabili, se si eccettuano le serie di Taylor e Machrurin, nè tampoco di variabili complesse, se si eccettua il seguente passo dell'art. 363 « Se $\alpha = \beta + i\gamma$, è noto che si può definire l'esponenziale e^{α} così:

$$e^{\alpha} = e^{\beta}(\cos\gamma + i\,sen\,\gamma) \text{ ».}$$

razione delle due operazioni *differenziare* ed *integrare*, è surrogato coll'altro di trattare prima tutto ciò che concerne gli infinitesimi del primo ordine, per volgersi in seguito agli infinitesimi degli ordini superiori. Questa innovazione non passò inosservata: essa accese una fiera polemica tra V. Riccati e G. Pessuti, di cui non è il caso di seguire qui le vicende. [G. L.]

(1) Se non m'inganno, da questo lato lasciano qualche cosa a desiderare gli art. 217 e l'esercizio quarto dell'art. 279. Quanto all'art. 217, a senso dell'art. 188, non sembrami giustificata l'inversione delle derivazioni usata (pag. 251, linea 10).

Digitized by Google

Il corso consta di una introduzione e di sei parti.

Nell' introduzione, l'Autore, sebbene un po' vagamente, procura di dare un' idea degli scopi principali ai quali questo corso è destinato, e di chiarire qui, ugualmente a ciò che fa in altre parti dello stesso come l' origine dei problemi geometrici, che si propone di risolvere, risieda nei bisogni della vita comune, e quella delle definizioni, in nozioni *precisate* a tutti famigliari.

Nella prima parte, dopo date le necessarie definizioni, sono dimostrati i teoremi fondamentali intorno ai limiti, agli infinitesimi ed agli infiniti.

Poste così le basi indispensabili, l'Autore nelle parti seconda e terza svolge gli elementi dei calcoli differenziale ed integrale (colle loro consuete applicazioni analitiche) senza dare precedenza a ciò che si riferisce più all' uno che all' altro di questi due calcoli, ma nell'ordine tenuto, procaccia di riuscire facile e conciso.

La parte quarta destinata alle applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale è, relativamente, alquanto più diffusa delle altre, ed ogni suo capitolo è terminato con esercizi opportunamente scelti.

L'Autore principia la parte quinta, che ha per oggetto le equazioni differenziali, coll' esporre le ragioni per le quali ha creduto conveniente di omettere la dimostrazione del teorema sull' esistenza dell' integrale delle stesse. Premesse poi le necessarie definizioni, non si occupa che di alcuni tipi speciali di equazioni differenziali delle quali determina direttamente gli integrali. I risultati così ottenuti vengono, da lui, chiariti applicandoli alla soluzione di facili problemi geometrici, dai quali prende occasione di fare osservazioni interessanti.

Le dichiarazioni esplicite, fatte dall'Autore, nell' art. 398, primo della parte sesta, destinata al calcolo delle variazioni, mi persuadono a non parlare di questa parte. C. M. PIUMA.

J. H. GRAF. *Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorp. Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen.* Mit dem Portrait und dem Facsimile eines Briefes Steiner's. Bern, Wyss, 1897 8.°, p. 54.

J. LANGE. *Jacob Steiner's Lebensjahre in Berlin* 1821-1863. Berlin, Guertner, 1899, 4.°, p. 70.

In una occasione recente (1) ebbi a notare come per pochi dei grandi matematici le notizie sulla vita siano tanto scarse quanto per J. Steiner: l'Accademia di Berlino, che lo annoverò fra i suoi più

(1) V. l'articolo *Di alcuni nuovi documenti relativi a J. Steiner* (Bollettino di storia e bibliografia matematica. Supplemento al Giornale di Matematiche di Battaglini, 1897).

Digitized by Google

splendidi ornamenti, che da lui ricevette un legato capace di accrescerne la forza ed il prestigio, non si curò mai di farne una commemorazione solenne. Sicchè trascorsero dieci anni dalla sua morte prima che il Geiser, cogliendo l'occasione di un congresso di naturalisti svizzeri, tentasse di rompere il silenzio che aveva seguito la discesa nella tomba del più grande geometra del secolo XIX. La commemorazione del Geiser fu altamente apprezzata, ma non soddisfece il desiderio — si potrebbe dire che lo rese più intenso! — di coloro che aspiravano a conoscere l'uomo a cui si è debitori della *Systematische Entwickelung;* tale desiderio non venne in alcun modo soddisfatto dall'edizione delle opere di Steiner, a cui non è premessa — come è costume — la biografia dell'autore; lo fu in parte almeno, dalla pubblicazione, fatta per cura del Prof. Graf, del carteggio fra il celebre geometra e L. Schläfli (1). Giovandosi appunto delle notizie che da esso si raccolgono e di quanto si apprende dalla collezione dei manoscritti steineriani depositati presso la Società dei Naturalisti di Berna, il Graf ha scritto la biografia che annunciamo: ci è lecito non estenderci al di là di un semplice annuncio, perchè da essa nessun fatto assolutamente nuovo apprenderanno coloro che conoscono la letteratura biografica intorno al sommo scienziato svizzero.

Ben diversamente dobbiamo esprimerci riguardo al lavoro del Lange; giacchè questi, giovandosi di documenti ufficiali ignoti od almeno inaccessibili alla maggioranza degli storici, è riuscito a rettificare molte notizie su Steiner ed a spargere grande luce sopra circostanze importantissime: sicchè alla sua memoria dovranno ricorrere in avvenire tutti coloro che vorranno scrivere un'esatta biografia del geometra che ci occupa.

Il Lange comincia col considerare lo Steiner quando, nella primavera del 1821, era venuto da Heidelberg a Berlino, attratto dalla prospettiva di occupare un posto nel Ginnasio Werder (2) che il direttore Zimmermann aveva offerto al Geldenmaier e che questi preferiva venisse dato al suo amico Steiner; ed infatti esso gli venne concesso interinalmente dal direttore. Ma avendo l'autorità superiore ritenuta irregolare questa concessione, essendo lo Steiner sprovvisto di titoli accademici, questi fu indotto a fare domanda (15 Aprile 1821) di subire un esame di abilitazione. Essa venne tosto accolta, e nove giorni dopo furono comunicati al candidato i due temi d'esame; eccoli: « 1.° Formazione, combinazione e sommazione delle serie numeriche elementari. 2.° Gli sforzi e gli esercizi di memoria, che si usano nell'insegnamento elementare, ostacolano od agevolano lo sviluppo dell'intelligenza? » Le

(1) *Der Briefwechsel zwischen J. Steiner und L. Schläfli* (Bern, 1896).
(2) Si ricordi che il Ginnasio tedesco non differisce dal nostro Liceo.

Digitized by Google

risposte furono presentate il seguente 24 Maggio; quella al tema di matematica non si è più trovata; ma l'altra esiste, accompagnata dal seguente poco lusinghiero giudizio di Hegel: « L'autore non si serve in alcun modo del concetto che intelligenza e memoria hanno fra loro un legame intimo e sostanziale, basato sulla natura dello spirito, e che soltanto riconoscendo tale connessione si può dir qualche cosa di fondato sul tema proposto; non espone nemmeno qualche cosa di originale e pratico dedotto da serie esperienze e si limita a riflessioni triviali ». In conseguenza — malgrado il buon risultato che diedero le lezioni di prova (sul volume delle piramidi) e l'esame orale (sull'analisi superiore, la stereometria, e la statica) — gli venne concesso (9 Giugno 1821) un mediocre attestato. Tale circostanza ed un rapporto contrario fatto dallo Zimmermann (29 Luglio 1822) — sembra perchè costui non aveva trovato lo Steiner disposto ad accettare come libro di testo gli elementi di geometria da lui redatti — ebbero per risultato il congedo dal Ginnasio Werder, che Steiner ricevette ai primi di Novembre del 1822. Per campare la vita egli fu allora costretto a dedicarsi all'insegnamento privato; e trovò occupazioni in due reputati istituti: cioè in quelli del Plamann (in cui fu istruito Bismarck) e del Cauer.

Le condizioni di Steiner si migliorarono per la fondazione nel 1824 in Berlino di una Scuola tecnica (« Gewerbeschule », la prima del genere), nella quale egli entrò, dietro invito del direttore Kloden, nell'autunno 1825. Per regolarizzare meglio la sua posizione, il nuovo insegnante si presentò nella primavera seguente all'esame di stato e, superate le prove, conseguì (11 Marzo 1826) un attestato che lo dichiarò « sufficientemente idoneo ad insegnare con frutto Matematica e Scienze naturali, in tutte le classi, anche le prime (1), di un Ginnasio ». A tale risultato non fu estranea certamente la memoria, oggi ben nota, intitolata *Einige geometrische Betrachtungen*, che il candidato presentò manoscritta. Incoraggiato da tale successo lo Steiner rivolse al Ministero della Pubblica Istruzione una istanza (16 Dicembre 1826) per ottenere di venir sollevato dalle cure pressanti della sussistenza, onde essere in grado di dedicarsi a completare i lavori intrapresi. Questa istanza è un'interessantissimo programma di ricerche geometriche; ad essa fu allegato un giudizio entusiastico (20 Ottobre 1826) del direttore Klöden sulle ricerche di Steiner, in particolare sull'opera *Theorie des Berührens und Schneidens des Kreises der Ebene, der Kugeln im Raume und der Kreise auf der Kugeloberfläche*, di cui venne recentemente scoperto il manoscritto e di cui si attende con tanto desiderio la pubblicazione completa. Il Ministro ricorse per un parere competente a Bessel; e questi rispose (28 Gen-

(1) Cioè le più elevate.

Digitized by Google

naio 1827) con una lettera che è per fermo uno dei più importanti documenti pubblicati dal Lange. Il giudizio del grande astronomo è così schiettamente favorevole che il Ministero rispose a Steiner (27 Febbraio 1827) che, dolente di non aver a propria disposizione fondi destinati ad incoraggiare le opere dell'ingegno, gli riserbava il primo posto che si sarebbe reso vacante in un ginnasio. La cattiva prova fatta nel Ginnasio Werder indusse Steiner a declinar tale offerta e a rivolgere (7 Marzo 1827) invece all'Accademia di Berlino una domanda di un sussidio per completare le sue ricerche scientifiche. E non indarno! chè nell'adunanza del 3 Maggio dello stesso anno vennero accordati al « locale insegnante privato J. Steiner 300 talleri affinchè egli possa sostenere le spese di stampa dell'opera progettata ». Nello stesso tempo il buon metodo didattico usato da Steiner (del quale metodo il Lange porge un'idea mediante alcuni importanti documenti ufficiali) persuade poco dopo (25 Febbraio 1829) il Kloden a proporre che allo Steiner venga accordato il posto di « IV maestro ordinario » allora vacante nella Scuola tecnica da lui diretta; e — malgrado un formidabile concorrente, malgrado che lo Steiner non fosse in grado di presentare un *testimonium academicum* richiesto dal Ministero — riesce ad ottenere il suo intento: così lo Steiner finalmente (7 Novembre 1829) arriva ad una posizione ufficiale stabile!

Non seguiremo il Lange nella narrazione delle contese che lo Steiner ebbe con superiori e colleghi dal Dicembre 1831 all'Agosto del prossimo anno; i documenti che egli pubblica mostrano come il sommo matematico, nel periodo di massima produttività, nell'epoca in cui dava l'ultima mano e pubblicava la *Systematische Entwickelung*, mal si addattava agli obblighi collegati alla carica di insegnante in una scuola secondaria: niuna meraviglia pertanto se egli, nell'inviare al Ministro della Pubblica Istruzione una copia del suo *opus magnum*, chiese di esserne esonerato. Ed il Ministro, in seguito ad una relazione particolareggiata di Crelle (28 Gennaio 1833), gli concesse il titolo di *Professore;* poco prima (23 Dicembre 1832) la Facoltà filosofica di Konigsberg lo aveva proclamato *Dottore* « honoris causa ». Segue la pubblicazione del noto opuscolo *Die geometrischen Constructionen;* la presentazione (26 Settembre 1833) di una copia al Ministro: una nuova relazione favorevole di Crelle (2 Novembre); e la domanda (7 Novembre) di Steiner di un posto di professore straordinario nell'Università di Berlino « conservando l'attuale stipendio di 700 talleri », domanda appoggiata da una raccomandazione del Principe Augusto, dei cui figli Steiner era stato insegnante. Essendo già occupati tutti i posti di professore straordinario, il desiderio di Steiner non potè venire soddisfatto; ma il ministro dichiarò (30 Novembre e 22 Dicembre) di fare assegnamento su Steiner per il Politecnico che

Digitized by Google

aveva in animo di fondare a Berlino (1). La sopravvenuta morte del Professore Oltmann ed il trasloco a Halle di Plücker, avendo reso vacanti dei posti nella Facoltà filosofica berlinese, lo Steiner rinnovò ben tosto la domanda (4 Dicembre); l'appoggio datogli da Crelle (v. una lettera diretta al ministro il 21 Dicembre e pubblicata dal Lange), gli fece ottenere quanto agognava, sicchè un decreto dell'8 Ottobre 1834 gli schiuse finalmente le porte dell'Università; però, prima di prender possesso del nuovo ufficio, egli dovette occupare per un altro semestre l'antico, in attesa di un successore.

« La disciplina rigorosa e spesso incomoda della monarchia scolastica è ora permutata colla libertà accademica della repubblica universitaria; esente dalle cure dell'esistenza materiale, non più sovracaricato di doveri ufficiali, coll'umore non turbato dai fastidî collegati a questi, Steiner può dedicarsi completamente a redigere ed ultimare l'opera intrapresa, cose per le quali amici e protettori s'interessavano tanto, ed alle quali egli stesso si era impegnato nelle sue suppliche ed istanze. Ma *habent sua fata libelli* ». La *Syst. Entw.* non venne mai finita. Però 21 volte egli ne spiegò all'Università i principî fondamentali; 17 li applicò alle coniche e 5 alle quadriche; le ricerche sui massimi e minimi vennero da lui esposte 6 volte e due un corso di « Stereometria, inclusa la così detta Geometria descrittiva »; sicchè (malgrado le frequenti assenze, dovute a ragioni di salute) non si può dire che Steiner abbia deluso le aspettative di chi lo volle professore universitario. Il massimo grado nella gerarchia accademica egli però non l'ottenne mai. Lo chiese una volta il 25 Maggio 1847, ma gli fu negato, non essendovi disponibile alcun posto di ordinario; lo ridomandò nel 1855, quando Dirichlet fu chiamato a Gottinga come successore di Gauss; ancora invano, avendo la Facoltà berlinese preferito (11 Luglio 1855) Kummer, probabilmente perchè le svariate ricerche da questi compiute davano affidamento che egli, più dell'unilaterale geometra svizzero, fosse in grado di insegnare la matematica tutta.

Dal largo compendio che presentammo ai nostri lettori dell'importante opuscolo del Lange (2), risulta che esso porge un quadro esatto dello Steiner come *insegnante;* la collezione delle sue opere ce ne somministra uno di Steiner come *geometra:* d'altronde il carteggio con lo Schläfli ci rivela alcuni lati del suo carattere: sicchè ben poco rimarrebbe da desiderare se fossero chiariti i rapporti del nostro geo-

(1) È noto che tale disegno non venne effettuato che nel 1871!

(2) Nel redigere questa recensione adottammo un sistema eccezionale, perchè la memoria di cui trattiamo sembra destinata a scarsa diffusione, facendo parte di una pubblicazione scolastica, intesa a commemorare il 75.° anniversario della « Gewerbeschule », in cui Steiner fece le sue prime armi.

Digitized by Google

metra con Crelle, con Jacobi e con gli altri matematici di Berlino, rapporti variabili per ragioni ignote, a cui più volte accenna il Lange misteriosamente. Quando ciò sarà fatto (ed auguriamo lo sia), si potrà dire completa la raccolta dei materiali per una completa biografia del celebre discepolo del Pestalozzi. G. L.

E. Cesàro: *Elementi di calcolo infinitesimale, con numerose applicazioni geometriche.* — Napoli, Alvano, 1899; 400 p. 4.° piccolo. (Prezzo L. 12.50).

Il nuovo trattato del prof. Cesàro consta di 13 capitoli, formanti tre grandi divisioni: *Teorie fondamentali* (C. I-IV), *Calcolo differenziale* (C. V-VIII), e *Calcolo integrale* (C. IX-XIII).

Il C. I *(Le funzioni)* contiene le nozioni fondamentali sulle funzioni d'una variabile reale, e la teoria dei limiti e della continuità. — Il C. II *(Le derivate)* comprende le regole di derivazione, le proprietà delle derivate e lo studio delle espressioni di forma indeterminata. — Il C. III *(Sviluppi in serie)* è dedicato alle serie a termini variabili in generale, e più particolarmente alla serie di Taylor. Segue la *valutazione asintotica* delle serie di potenze, la teoria dei massimi e minimi delle funzioni d'una variabile, l'interpolazione, lo spezzamento delle frazioni razionali. — Il C. IV *(Funzioni di più variabili)* tratta delle funzioni di più variabili in generale, delle funzioni composte, delle funzioni omogenee, dei wronskiani, della formola di Taylor per le funzioni di più variabili, e dei massimi e minimi delle funzioni di più variabili.

Il C. V *(La differenziazione)* apre lo studio del Calcolo differenziale colla introduzione dei concetti d'infinitesimo e di differenziale d'una funzione, a cui segue lo studio delle funzioni implicite. — I C. VI, VII, VIII contengono le *Applicazioni* (del Calcolo differenziale) *alle curve piane, alle curve storte, alle superficie.*

Col C. IX *(L'integrazione)* incomincia il Calcolo integrale. Data la definizione d'integrale, e stabilite le regole d'integrazione (integrazione diretta, immediata, per sostituzione, per parti, per serie), si passa alla integrazione multipla, alla trasformazione degli integrali multipli ed all'integrazione dei differenziali esatti. — Il C. X *(Applicazioni al calcolo di talune notevoli classi d'integrali)* comprende l'integrazione delle funzioni razionali, irrazionali e trascendenti, e lo studio di alcuni integrali definiti (integrali ellittici completi e integrali euleriani). — Il C. XI tratta delle *Applicazioni* (del Calcolo integrale) *a misure geometriche.* — Il C. XII è dedicato alle *Equazioni differenziali*, e contiene i seguenti argomenti: nozioni fondamentali relative alle equa-

Digitized by Google

zioni ordinarie del 1.° ordine, equazioni del 1.° ordine integrabili, applicazioni geometriche, equazioni lineari d'ordine qualunque, equazioni a differenziali totali, sistemi simultanei, equazioni a derivate parziali del 1.° ordine. — Infine il C. XIII *(Le variazioni)*, di sole 6 pagine, da un cenno brevissimo del Calcolo delle variazioni.

Seguono 9 note, di cui ecco i titoli: *Sul concetto di limite; Gli estremi oscillatori; Dimostrazione del teorema di Cantor; Teorema di Hadamard; Minimi e massimi delle funzioni; Cuspidi e flessi nel polo; Sulla torsione delle curve; Sul calcolo delle curvature d'una superficie; Formole di Rodrigue.*

I tratti caratteristici di questo libro sono gli stessi che presentano le altre opere del Cesàro: rigore nelle teorie, semplicità notevole nei mezzi di dimostrazione, grande concisione di linguaggio e ricchezza di applicazioni. Anzi alcuni di tali tratti appaiono qui ancor più spiccati che nelle opere precedenti. In certi punti basta che il lettore rallenti la sua attenzione pel corso di poche linee, od anco di poche parole, perchè gli sfugga taluno dei concetti più importanti e fondamentali. È questo un merito o un difetto? È bene abituare i giovani sin da principio *a sudar sangue* sui libri, o non si corre con ciò il pericolo che la loro attenzione si stanchi, e che essi finiscano per passar sopra alle cose che non capiscono? Il libro destinato agli esordienti deve, come una formola matematica, contenere nè più nè meno di ciò che è voluto dalle esigenze della logica, o non deve avere anche, come potrebbe dirsi, un certo *potere persuasivo?* Noi non oseremmo decidere tale questione, e forse essa non può neppur risolversi in via assoluta. Certo è che, per chi già conosce la materia, è un vero piacere ritrovare nel libro del Cesàro sintetizzati con poche osservazioni sparse qua e là tutti i concetti fondamentali del Calcolo: come è un grande godimento intellettuale l'aggirarsi pel giardino fiorito delle numerosissime applicazioni, specialmente geometriche, rilevandovi ad ogni passo tante cose curiose, interessanti e poco note.

Però la seduzione delle applicazioni ha tratto l'autore — lo confessa egli stesso — a sacrificare alquanto la parte teorica. Ciò è particolarmente sensibile nel capitolo sulle equazioni differenziali, dove p. es., sono omessi i tipi integrabili d'equazioni ordinarie d'ordine superiore, e la teoria dei sistemi simultanei è trattata soltanto di sfuggita, -- e in quello sul Calcolo delle variazioni, dove l'autore non fa neppure un cenno delle recenti obiezioni che scalzano quasi dalla base questa parte del Calcolo.

Finiamo con una osservazione di dettaglio. Trattando dei wronskiani, l'autore ha trascurato di dare al teorema fondamentale relativo a queste espressioni la forma rigorosa che esso ha assunta in seguito alle ricerche di Peano.

Digitized by Google

Se il libro, come speriamo, avra la fortuna che merita, è desiderabile che l'autore in una nuova edizione voglia ampliare i due ultimi capitoli, e specialmente quello relativo alle equazioni differenziali, in modo da fornire agli studenti delle nostre Università tutte le cognizioni necessarie pel seguito dei loro studi.

G. VIVANTI.

J. TANNERY et J. MOLK. *Eléments de la théorie des fonctions elliptiques*, T. III. *Calcul intégral (1.ère Partie)*. Paris, Gauthier-Villars, 1898, p. VIII + 267, 8.°. (Prezzo L. 8.50).

Nei primi due volumi di quest'opera gli autori, dopo avere premessa una lucida esposizione dei fondamenti della teoria delle funzioni analitiche secondo i concetti di Weierstrass, li applicarono alla costruzione ed allo studio della trascendente intera σ; col mezzo di questa formarono poi tutte le altre svariate funzioni, che furono considerate dai differenti cultori della teorica delle funzioni etlittiche, ne esposero le più cospicue prerogative e ne insegnarono le mutue relazioni. Nella seconda parte dell'opera essi battono tutt'altra strada; ispirandosi ai lavori classici di Cauchy, Liouville ed Hermite, prendono come fondamento la celebre formola che lega l'integrale preso lungo un contorno di una funzione univoca ai residui della funzione stessa relativa ai punti singolari che cadono entro quel contorno: gli è appunto per indicare che la nozione d'integrale di funzione di una variabile complessa entra ora continuamente in giuoco, che essi intitolarono questa seconda parte « Calcolo integrale ». Se a tale mutata orientazione non faranno buon viso coloro che vogliono ad ogni costo scrupolosamente serbata l'unità di metodo, essa verrà invece approvata da chi pensa essere utilissimo, quando si espongono risultati da tempo acquisiti, l'indicare tutti i varî metodi con cui furono ottenuti, tutti i varî punti di vista da cui venne esaminata una medesima questione. Il vol. che oggi annunciamo è il primo dei due destinati a formare la seconda parte dell'opera dei sig.ri Tannery e Molk: tratta due temi, cioè « teoremi generali » ed « inversione ». Riguardo a quello, vengono esposte le proposizioni fondamentali governatrici della teoria delle funzioni biperiodiche e sono applicate alla decomposizione in elementi semplici delle funzioni ellittiche, all'addizione, alla moltiplicazione, allo sviluppo in serie trigonometriche ed al calcolo degli integrali delle funzioni biperiodiche. All'altro tema sono consacrati due capitoli: uno dedicato al calcolo di τ, o di ω_1, ω_2 conoscendo k^2 o g_2, g_3, l'altro all'inversione delle funzioni periodiche del second'ordine, in particolare della funzione sn.

Siamo certi che questo volume riceverà la festosa accoglienza che ot-

Digitized by Google

tennero i due primi; possa esso venire presto seguito da quello in cui gli egregi autori scriveranno la parola *fine* alla loro utilissima opera.

G. L.

W. NERNST und A. SCHONFLIES. *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurz gefasstes Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie.* Zweite vermehrte und verbesserte Ausgabe. München und Leipzig, 1898, 8.°, p. VII + 239.

Non era ancora stampata la recensione, comparsa in questo *Bollettino* (Anno I, 1898, p. 48-51) del trattato di calcolo di Nernst e Schonflies, che già era uscita la seconda edizione di questo buono ed utile libro. Oltre per quelle piccole ma numerose modificazioni di forma che agli Autori è parso bene introdurre per render il linguaggio sempre più facilmente accessibile alla maggioranza degli studiosi, la nuova edizione si distingue per alcuni interessanti aggiunte, sia nella parte teorica (cenno sugli integrali di funzioni irrazionali, sulle equazioni differenziali, sui determinanti, sul teorema fondamentale dell'Algebra), sia nella parte applicativa, la quale è stata arricchita di importanti esempi (velocità di soluzione di un solido, espressione del 2.° principio di termodinamica, movimento con attrito ecc.). La relativa rapidità colla quale è stata esaurita la 1.ª edizione, parla abbastanza chiaramente in favore di questo libro, che noi ora tanto più volontieri raccomandiamo agli studenti di scienze sperimentali, dopo che ci siamo valsi di esso per istruire un giovane chimico nei fondamenti del calcolo.

P. PIZZETTI.

M. SIMON. *Analytische Geometrie des Raumes.* Mit 23 Abbildungen. Leipzig, Göschen, 1898, 8.° picc., p. 200 (Prezzo 80 pf.).

Questo manuale fa sistema con quello relativo alla geometria analitica del piano (v. questo *Bollettino*, 1898, p. 18-19) e possiede le stesse qualità, in base alle quali noi lo raccomandammo ad insegnanti e studenti. La materia è ripartita in 10 sezioni, intitolate rispettivamente: I. *Coordinate* cartesiane pei punti dello spazio. II. *Il principio di dualità.* III. *Trasformazione delle coordinate.* IV. *La sfera.* IV. (sic!) *Le superficie di second' ordine e seconda classe in generale.* V. *Coni e cilindri.* VI. *Le quadriche a centro in generale.* VII. *Le quadriche a centro considerate separatamente.* VIII. *I paraboloidi.* IX. *Cubatura.* Le questioni trattate dall'A. sono assai più numerose, non solo di quanto indichi questo elenco di titoli, ma anche di quelle che ordinariamente sono contenute nei manuali elementari di geome-

Digitized by Google

tria analitica; nell'impossibilità di enumerarle, citiamo soltanto l'ultima sezione ove l'A. entra di soppiatto nel dominio del calcolo integrale, e la sezione VI ove egli, occupandosi delle proprietà focali delle quadriche, espone, servendosi di coordinate, le notissime ricerche del Reye sugli assi delle superficie di II ordine (v. *Geometrie der Lage*, XV Lezione della II parte). L'edizione — sia riguardo al testo che alle figure — fa onore alla casa Goschen. G. L.

E. Czuber. *Vorlesungen über Differential-und Integral-Rechnung. II Band.* Leipzig, Teubner, 1898. IX-428 p. 8.° (Prezzo, Mk-10).

A brevissima distanza dal primo volume di quest'opera (cfr. questo *Bollettino*, Anno I, 1898, p. 98) è venuto in luce il secondo ed ultimo. Esso comprende il Calcolo integrale, e si divide in 5 capitoli.

Il Cap. I contiene le definizioni e le proprietà fondamentali, gl'integrali elementari, e i metodi d'integrazione per parti e per sostituzione.

Il Cap. II tratta dell'integrazione delle funzioni razionali, irrazionali e trascendenti.

Il Cap. III è dedicato agl'integrali definiti: — calcolo esatto ed approssimato degl'integrali definiti, formola di Wallis, teoremi della media, integrali impropri, integrazione per serie, derivazione e integrazione sotto il segno, integrali multipli.

Il Cap. IV contiene le applicazioni geometriche (quadrature esatte ed approssimate, rettificazioni, volumi, aree di superficie curve) e i principii della teoria del potenziale (definizioni, proprietà elementari, equazioni di Laplace e di Poisson, interpretazione meccanica, superficie di livello, linee di forza).

Infine il Cap. V comprende la teoria delle equazioni differenziali. La prima parte di esso, dedicata alle equazioni ordinarie, tratta successivamente delle equazioni del 1.° ordine — generalità, metodi d'integrazione, — soluzioni singolari, applicazioni geometriche, dei sistemi d'equazioni simultanee del 1.° ordine, delle equazioni d'ordine superiore, delle equazioni lineari, dell'integrazione per serie, del calcolo delle variazioni. La seconda parte è dedicata alle equazioni a derivate parziali, e si occupa quasi soltanto di quelle del 1.° ordine a due variabili indipendenti, terminando con pochi cenni su alcuni tipi semplici d'equazioni del 2.° ordine.

I meriti e i difetti generali di questo volume sono press'a poco gli stessi del precedente, e non è quindi il caso di insistervi.

Entrando invece in qualche dettaglio, diremo che troviamo opportuna l'introduzione dei concetti di elemento lineare e superficiale e di trasformazione infinitesima nella teoria delle equazioni differenziali. Pure lodevole ci sembra l'idea di presentare come una delle applicazioni del

Digitized by Google

Calcolo integrale la teoria del potenziale, per quanto chi studia il Calcolo per la prima volta non sia in grado di comprendere la parte meccanica di questa teoria.

D' altra parte dobbiamo fare parecchie osservazioni.

Il teorema a p. 116-117 è inesatto, giacchè la prima parte di esso è vera senza eccezione, solo quando l'ordine d' infinito di $f(x)$ è, non solo minore di 1, ma esprimibile mediante un numero reale minore di 1. Un analogo appunto può farsi al teorema a p. 124.

Le regole per la derivazione e l'integrazione sotto il segno (p. 148-149, 158-159) vengono dimostrate sotto le condizioni, notoriamente non necessarie, dell' esistenza rispettivamente $\frac{d^2f}{dy^2}$ e di $\frac{df}{dy}$.

Al principio della teoria delle equazioni differenziali del 1.° ordine (p. 270) manca un cenno, anche fugace, sulla questione dell' esistenza dell' integrale; e resta pertanto ingiustificata l' esistenza, asserita a p. 288, del fattore integrante.

Non ci sembra conveniente, dal punto di vista pratico, premettere la teoria dei sistemi simultanei d' equazioni (del 1.° ordine) a quella delle equazioni d' ordine superiore: e ciò perchè, conoscendosi molti più metodi per integrare le equazioni d' ordine superiore che non per integrare i sistemi simultanei, accade assai più spesso nella pratica di ridurre questi a quelle che viceversa. Ed infatti nel presente volume non è indicata la via per integrare un sistema simultaneo se non in un caso specialissimo. Del resto anche la teoria delle equazioni d' ordine superiore vi è trattata un po' troppo brevemente, essendovi omesse molte cose che si trovano in tutti i trattati elementari.

Infine avremmo voluto che l'autore, nel paragrafo dedicato al calcolo delle variazioni, avesse almeno accennato all' esistenza delle gravi obiezioni che contro di esso furono di recente sollevate, e che ne mettono in dubbio anche i risultati più elementari.

G. Vivanti.

M. Cantor. *Politische Arithmetik, oder die Arithmetik des täglichen Lebens*. Leipzig, Teubner, 1898, 8.° picc., p. X + 136 [Prezzo del vol. leg. Mk. 1.80].

Il libro che annunciamo rappresenta il frutto di un insegnamento impartito da molti anni nell' Università di Heidelberg. Se ne facciamo cenno, benchè il tema da esso trattato esca dal programma del nostro *Bollettino*, gli è che ne è autore una delle personalità più venerate, simpatiche e care del mondo matematico, gli è che è sì squisita l' arte e sì pregevole la dottrina di lui spiegata in questo lavoro, che egli lo seppe rendere gradito e stimabile anche per coloro che, dedi-

Digitized by Google

candosi completamente alle speculazioni scientifiche, hanno in uggia tutte le altre, in ispecie quelle commerciali. Ma lo spazio ci vieta di indugiarci in un' analisi del contenuto e ci impone, per converso, di limitarci a riferire un semplice indice dello scritto che rappresenta una faccia nuova dell' attività intellettuale e didattica del Nestore degli storici della matematica: I. *Interesse semplice* — II. *Interesse composto* — III. *Fondamenti del calcolo delle probabilità* — IV. *Prestiti per lotterie* — V. *Assicurazioni* — VI. *Tavole di mortalità* — VII. *Assicurazioni sulla vita semplice* — VIII. *Dividendi* — IX. *Altri metodi di assicurazione basati sulla mortalità.*

Se non c' inganniamo, non esiste in Italia alcuna opera compilata su un piano somigliante; onde ci sembra che tornerebbe di estesa utilità una traduzione di essa, nella quale venissero apportate quelle modificazioni all' originale, che sono rese necessarie dalle differenze fra le disposizioni del codice tedesco e quelle dell' italiano. G. L.

G. Vivanti. *Teoria dei gruppi di trasformazioni. Lezioni di Analisi superiore fatte nella R. Università di Messina. Anno sc. 1897-98. Raccolte dal Dottor* Domenico Apreda. Reggio Cal., Litografia Marsan. 8.°, p. 369 [Prezzo L. 6. 50].

È questa, se non ci inganniamo, la prima pubblicazione italiana avente per fine di divulgare fra noi la conoscenza delle teorie alle quali S. Lie ha legato il proprio nome. Quanto dessa sia opportuna apparirà evidente a chi rifletta che — tacendo dell' essere la lingua in cui esse vennero esposte non generalmente nota ai matematici novellini — esse si presentano allo studioso sotto il terribile aspetto di sei poderosi volumi di 4166 pagine! A ragione pertanto il prof. Vivanti giudicò come buona cosa lo sfrondare la esposizione del Lie di tutti gli sviluppi accessorî e di ridurla quindi a quanto ha di essenziale per un primo studio. E poichè le discipline di cui parliamo sono di quelle che si apprezzano in base alle applicazioni che se ne vedono, così a ragione l' autore, dopo di avere nella *Parte I* fatto conoscere la teoria generale dei gruppi di trasformazioni, si arrestò nella *II* a mostrare gli usi che se ne può fare nello studio delle equazioni differenziali, per passare nella *III* ad occuparsi delle trasformazioni di contatto. Per tale lodevole scelta della materia e per la chiarezza in cui è presentato, noi giudichiamo queste *Lezioni* come un' ottima preparazione per coloro che intendono arruolarsi nella schiera, ogni giorno numerosa, dei seguaci del celebre geometra norvegese; possano esse contribuire all' ulteriore sviluppo di una teoria a cui la geometria deve già tanto e da cui l' analisi attende ansiosa quei frutti che taluni fanno sperare! G. L.

Digitized by Google

G. OLTRAMARE. — *Calcul de généralisation.* — Paris, A. Hermann, 1899, 8.° gr. p. VIII + 191.

Il nuovo calcolo — pel quale l'illustre uomo che ne è inventore domanda un posto cospicuo nell'Analisi superiore — si può far rientrare nella classe dei metodi simbolici, tanto coltivati dai geometri inglesi, ed alla divulgazione dei quali il Boole ha contribuito nella maniera a tutti nota. Esso ha il proprio fondamento nella considerazione di una operazione simbolica distributiva G, la quale riveste una forma speciale in corrispondenza ad ogni funzione φ di quante si vogliano indeterminate $a, b, c \ldots$. Questa operazione è pienamente determinata dalla proprietà di mutare l'esponenziale $e^{au+bv+cw+\cdots}$ appunto in $\varphi(a, b, c, \ldots)$; per conseguenza è anche individuato l'effetto della operazione G sopra qualsivoglia funzione uniforme $\Psi(u, v, w, \ldots)$, previamente moltiplicata per l'esponenziale $e^{xu+yv+zw+\cdots}$: il risultato è una forma simbolica sotto cui si può porre la funzione Ψ. Quanto utile torni una tale trasformazione emerge dal fatto che col suo mezzo si possono calcolare innumerevoli integrali definiti (fra gli altri, quelli a cui Cauchy applicò il suo calcolo de' residui) e stabilire agevolmente le celebri formole di Liouville per la differenziazione e l'integrazione ad indice frazionario; si aggiunga che il « calcolo di generalizzazione » insegna a integrare molte equazioni differenziali od almeno a scriverne l'integrale generale sotto forma di un integrale definito semplice o multiplo. « Possiamo dire » (così finiremo, appropriandoci le espressioni stesse dell'A.) « che questo procedimento è per l'analisi superiore, ciò che i logaritmi sono pel calcolo numerico; esso diminuisce in molti casi le difficoltà della differenziazione e dell'integrazione; si riconoscerà, in particolare, che esso fa dipendere l'integrazione delle equazioni alle differenze e differenziali parziali tanto isolate, quanto simultenee, dalla semplice risoluzione di equazioni algebriche; di più, permette di riconoscere, in generale, il numero massimo di funzioni arbitrarie che può contenere l'integrale di un'equazione per essere considerata per integrale completa e, in alcuni casi particolari, è in grado di determinare il numero esatto di queste funzioni arbitrarie ». G. L.

G. FANO. *Lezioni di geometria non euclidea.* Roma, Lit. Cippitelli, 1898, p. 271, 8.° (litogr.).

I. La teoria delle parallele dai primordi fino a Gauss. — II. La Geometria non euclidea secondo Lobatscheffsky e Bolyai. — III. La memoria del Beltrami « Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea. — IV. La memoria di Riemann « Ueber die Hypothesen

Digitized by Google

welche der Geometrie zu Grunde liegen ». — V. I continuatori di Riemann, Beltrami, Helmholtz. — VI. Considerazioni generali sulle proprietà metriche delle figure. Determinazioni metrico-prujettive nelle forme di 1.ª specie. — VII. Determinazioni metrico-proiettive nelle forme di 2.ª specie. — VIII. Determinazioni metrico-proiettive nello spazio.

G. NÉDÉLEC. *Le calcul vectoriel et ses applications en geometrie et en mécanique.* Premier volume. Paris, Gauthier-Viliars, 1887, p. X + 246 (Prezzo L. 6).

Parte prima. Principî generali del calcolo vettoriale. — I. Origine e natura del calcolo vettoriale. — II. Nozioni generali sui vettori. — III. Teoria dei versori. — IV. Calcolo dei versori; quaternioni. — V. Moltiplicazione vettoriale. — VI. Addizione vettoriale.

Parte seconda. Teoria delle funzioni vettoriali di primo grado. — VII. Prime nozioni sulle funzioni vettoriali. — VIII. Nozioni sulle funzioni esplicite. — IX. Funzioni vettoriali di primo grado — X-XI. Teoria vettoriale del piano. — XII. Rapporto anarmonico vettoriale.

PROGRAMNI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

UNIVERSITÀ DI PISA. CORSO DI GEOMETRIA SUPERIORE

Anno 1898-99

Introduzione alla geometria projettiva degli iperspazi

I.

Definizione dello spazio ad r dimensioni S_r. — Piramide fondamentale. — Punti indipendenti e dipendenti. — Trasformazione di coordinate. — Spazî subordinati. — Punti indipendenti di uno spazio subordinato sono tali anche in S_r e viceversa. — Spazio d'intersesezione S_l e spazio di appartenenza S_t di due spazi subordinati S_k, $S_{k'}$. — La relazione $k + k' = l + t$. — Applicazione ad esempi diversi. — Coordinate di un iperpiano. — Lo spazio Σ_r. — Equazione di un punto e di un iperpiano. — Lo spazio S_k come sostegno di una stella Σ_{r-k-1}. — Legge di dualità. — Proiezioni e sezioni. — Le condizioni per due spazi S_k, S_k, segantisi in S_e e appartenenti ad S_t sono $(r - t)(l + 1)$. — Casi particolari. — Coordinate di un S_k $(r - 1 > k > 0)$. — Loro proporzionalità alle correlative del Σ_{r-k-1} che ha S_k per sostegno. — Le $\binom{r+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - 1$ relazioni quadratiche a cui soddisfano.

Digitized by Google

II.

Cenno della via sintetica per stabilire la geometria degli iperspazi. — Introduzione degli elementi immaginarî e definizione della proiettività. — Teorema fondamentale sulla coincidenza di due S_r omografici. — Prospettività. — Condizioni di prospettività di due spazî omografici. — L'omografia fra due spazî può ottenersi con un numero finito di prospettività (od omologie). — Costruzione della proiettività fra due spazî, date $r+2$ coppie di punti corrispondenti. - Identità della trasformazione lineare con la proiettività. — Omografie singolari di specie h.

Omografie di uno spazio in sè. — Spazî fondamentali ed invarianti assoluti. — Teoremi relativi (di Segre). — Omografie a spazî fondamentali semplici, loro formule ridotte, condizioni della loro identità proiettiva, e loro costruzione. — Spazî fondamentali multipli secondo Predella. — Spazî caratteristici, coppie caratteristiche, formule ridotte, classificazione e costruzione di un'omografia a spazî fondamentali multipli. — Teorema generale sulla proiettività di due omografie qualunque. — Omografie cicliche. — Deduzione del teorema di Weierstrass sulla trasformazione lineare di forme bilineari. — Relazioni fra i numeri h (dimensioni degli spazî fondamentali) e i numeri e (esponenti dei divisori elementari).

III.

Correlazioni di uno spazio in sè. — I due problemi degli elementi incidenti e degli elementi involutorî. — Correlazioni involutorie. — Correlazioni e, in particolare, sistemi nulli degeneri. — Formule ridotte del sistema nullo. — Omografia appartente ad una correlazione (non involutoria). — Sua permutabilità con la correlazione e proprietà che ne seguono. — Altre proprietà di quella omografia. — Fascio di correlazioni.

Sistema polare. — Quadrica V^2_{r-1} degli elementi coniugati a sè stessi. — Spazî polari. — Sistemi polari degeneri, quadriche specializzate e loro quadriche nucleo. — $(r+1)^{ple}$ polari ed equazioni ridotte della V^2_{r-1}. — S_m tangenti e formule relative. — S_m appartenenti alla V^2_{r-1}. — Proiezione stereografica della quadrica. - Infinità de' suoi S_m. — Suoi spazî lineari di dimensione massima nei casi di $r-1$ dispari o pari e di $r-1$ semplicemente o doppiamente pari. — Applicazione alla geometria della retta. — Il gruppo delle 32 trasformazioni date da sei complessi lineari due a due in involuzione. — Numero dei punti comuni a due $V^{(lm)}_{r-1}$ di V^2_{r-1} (r dispari).

Digitized by Google

IV.

Fascio di quadriche. — Caratteristica e invarianti assoluti. — Equazione canonica di un complesso quadratico generale. — Luogo degli S_{r-m-1} polari di un S_m rispetto alle quadriche del fascio. — Gli S_{r-2} polari dei punti di S_m rispetto alla quartica base sono spazi secanti del luogo precedente. — Spazi quadratici e lineari della quartica base. — Casi particolari.

Fascio di quadriche tutte specializzate h volte. — Condizione per due quadriche di un tal fascio. — Quadriche del fascio specializzate più che h volte. — Fascio di quadriche generali di cui la caratteristica e gli invarianti assoluti appartengono al fascio. — Il luogo degli spazi doppi. — Limite superiore per il numero h.

V.

Ipersuperficie. — Loro intersezioni. — Sistemi lineari di ipersuperficie. — Ipersuperficie polari e loro fondamentali proprietà. — Iperpiano tangente. — Punto doppio. — Hessiana. — Varietà parabolica. — Punto multiplo. — Rette con contatto $(s+i)^{\text{punto}}$ in un punto s^{uplo}. — Caso in cui il punto multiplo è in un vertice della piramide fondamentale. — Classe di una ipersuperficie di ordine n e sua modificazione per l'esistenza di un punto s^{plo}, il cui cono non ha generatrici multiple.

Varietà algebriche in generale. — Loro proiezioni e sezioni; dimensione; irriducibilità. — Proiezione biunivoca di una varietà e dimensioni delle varietà dei punti immagini di più punti di essa. — Ordine di una varietà. — Sua rappresentazione completa con $r+1$ equazioni (figurazione completa di Kronecker). — Corrispondenze algebriche fra varietà. — Varietà razionali. — Le corrispondenze algebriche come varietà algebriche. — Rappresentazione monoidale di una varietà (figurazione principale di Kronecker). — Caso di $r=3$. — Gli S_k e gli S_{r-1} tangenti di una V_k. — Proiezione biunivoca da un suo punto e da più suoi punti generici. — Condizioni di irriducibilità e di appartenenza. — Varietà di intersezione di più varietà. — Serie lineari di V_{k-1} sopra una V_k e loro dimensione.

VI.

Curva C_r, razionale normale, di S_r. — Sue generazioni proiettive. - Coordinate dei punti della curva e dei suoi piani iperosculatori espresse per un parametro. — Teorema di Clifford e sue conseguenze. — Le curve razionali son tutte proiezioni delle C_r di S_r.

Digitized by Google

Le V_2^{r-1} di S_r (teorema di Del-Pezzo). — Le rigate razionali normali di S_r. — Proprietà delle curve direttrici. — Direttrici minime. — Se m è l'ordine della direttrice minima, k generatrici sono indipendenti, o no, secondochè $k \leq m+1$ ovvero $k > m+1$. — Determinazione delle direttrici d'ordine $r-k+1$ $(0 \leq k \leq m)$ e loro intersezioni. — Classificazione delle rigate secondo l'ordine m delle direttrici minime. — Carattere proiettivo della classificazione: costruzione delle rigate di classe m e loro equazioni canoniche. — Le rigate razionali sono tutte proiezioni delle V_2^{r-1} di S_r. — Rappresentazione piana della V_2^{r-1} di classe m. — Enti fondamentali. — Rappresentazione minima nel caso di r dispari ed $m = \frac{r-1}{2}$. — Rappresentazione minima in ogni altro caso. — Applicazione alla superficie gobba di 3.° grado. — Le curve di genere $= 0$ e > 0 della superficie. — Le sue curve assintotiche.

Le V_{i+1}^{r-i} $(i > 1)$ di S_r (teorema di Segre). — Loro generazioni proiettive. — Considerazioni generali sulla varietà rappresentata dall'annullarsi di una matrice, i cui elementi sono forme lineari. Suo doppio modo di generazione: sistemi coniugati di Veronese.

VII.

Coniche coniugate. — Sistemi lineari associati di coniche ∞^r $(r < 5)$ e ∞^{4-r}. — Fasci e schiere, reti e tessuti di coniche tutte degeneri e loro sistemi associati.

L'S_5 di coniche-inviluppi di un piano π. — La superficie F_2^4 (di Veronese) e l'ipersuperficie M_4^3. — Il Σ_5 delle coniche-luogo di π. — Gli S_2 di M_4^3 di 1.ª e 2.ª specie. — Le φ_2^4, μ_4^3 correlative della F_2^4 e M_4^3. — Illustraziene algebrica dei precedenti risultati geometrici. — Le ∞^5 M_4^2 per F_2^4 (e correlativamente) sono le quadriche polari dei punti di S_5 rispetto ad M_4^3. — Dei due sistemi di S_2 di una tale M_4^2 uno è di S_2 trisecanti, l'altro di S_2 unisecanti e fra questi una ∞^1 è di S_2 (di 1.ª specie) secanti F_2^4 lungo coniche. — Caso in cui il polo di M_4^2 rispetto ad M_4^3 è su questa ipersuperficie. — Le ∞^8 omografie e correlazioni (fra cui ∞^5 polarità) che trasformano in sè e fra loro F_2^4, φ_2^4. — Confronto fra la geometrica proiettiva delle coniche di un S_2 e quella dei complessi lineari di S_3. — Caso in cui la quadrica dei complessi speciali passi per la F_2^4.

Superficie di Steiner. — Suoi elementi singolari e loro relazioni. — Rappresentazione piana della superficie. — Immagini e proprietà delle sue curve assintotiche.

Digitized by Google

Le curve C_8 di F_2^4 comuni a ∞^6 M_4^2 sono le immagini delle quartiche-piane C_4. — Generazioni proiettive (di Caporali) in una C_4, in particolare, come inviluppo di una serie di quadratica di coniche e per mezzo di due fasci proiettivi di coniche. — La quadrica per C_8 che dà la corrispondenza polare rispetto a C_4, e particolari quadriche che ne risultano. E. BERTINI.

NOTIZIE

PER LA TEORIA DEI NUMERI PRIMI. — L'Accademia di scienze fisiche e matematiche di Napoli conferirà un premio di *Lire mille* all'autore della migliore memoria sul seguente tema: « Esporre, discutere e coordinare, in forma possibilmente compendiosa, tutte le ricerche concernenti la determinazione della totalità dei numeri primi, apportando qualche notevole contributo alla conoscenza delle leggi secondo le quali questi numeri si distribuiscono tra i numeri interi ». Scadenza 21 Marzo 1900.

* * *

TEMA DI MATEMATICA PROPOSTO DALL'ACCADEMIA DEL BELGIO. — Una medaglia d'oro del valore di L. 600 verrà conferita all'autore del miglior contributo allo studio algebrico e geometrico delle forme $n-$ lineari, n essendo superiore a 3. Le memorie dei concorrenti dovranno essere scritte in fiammingo od in francese, e dirette anonime al Segretario perpetuo dell'Accademia del Belgio, non più tardi del 1.° Agosto 1900.

* * *

RISTAMPE. — WOLFANGI BOLYAI DE BOLYA. *Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseos purae elementaris ac sublimioris. Editio* II, T. I. *Mandato Academiae Scientiarum Hungaricae suis adnotationibus adjectis ediderunt* J. KONIG *et* M. RÉTHY. *Budapestini* 1897, p. XII + 679, 4.° [Prezzo 40 Mk.].

Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus in the British Museum. With an Introduction by E. A. WALLIS BUDGE. 21 Plates. [Cfr. Nature, No. 1515; London, 24 Nov. 1898].

Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ *mit Mathematikern. Herausgegeben von* G. J. GERHARDT. I Bd. Berlin, Mayer und Müller 1899, p. XXVIII + 761, 8.° [Prezzo 28 Mk.].

GERBERTI (PAPAE SILVESTRI II). *Opera mathematica, primum collegit et edidit* N. M. BUBNOW. Berlin, R. Friedländer und Sohn, 1899 [Prezzo 12 Mk.].

Digitized by Google

∴

SECONDA CONFERENZA INTERNAZIONALE SULLA LETTERATURA SCIENTIFICA. — Le deliberazioni prese nel corso di tale riunione, tenutasi a Londra nei giorni 11-13 Ottobre 1898, si trovano riassunte in un articolo inserito nel n.° 1513 di *Nature* (London, 27 Ottobre 1898), che la deficienza di spazio ci vieta di riprodurre. Fra i rappresentanti ufficiali intervenuti notiamo G. Darboux per la Francia e F. Klein per la Germania; le ragioni per cui l'Italia non venne rappresentata si apprendono dal T. I, 1898 (p. 157 e 174) del *Bollettino della Società bibliografica italiana*.

∴

PER FAVORIRE LE RICERCHE SUL CALCOLO GEOMETRICO venne recentemente fondata una società mondiale intitolata: « International Association for Promoting the Study of the Quaternions and allied Systems of Mathematics », e della quale venne già pubblicato lo statuto. Chiunque lo desideri, può farne parte, purchè s'impegni di pagare una quota annua di L. 12. Pel biennio 1899-1900 l'ufficio di presidenza è così costituito: *Presidente* R. Stawell Ball; *Segretario generale e tesoriere* A. Macfarlane; *Segretari nazionali:* A. Mc. Aulay (Australia), P. Genty (Francia), V. Schlegel (Germania), C. J. Joly (Inghilterra), G. Peano (Italia), S. Kimura (Giappone), A. P. Kotelnikof (Russia), F. Kraft (Svizzera), A. S. Hathawai (Stati Uniti d'America).

∴

CONCORSO BANDITO DALL'ACCADEMIA DI TOLOSA. — Tema di matematica: Ricerca e studio delle famiglie di superficie dotate della proprietà che tutte le loro trajettorie ortogonali siano curve piane, scegliendo di preferenza uno dei seguenti punti di vista:

1.° Affinchè tutte le superficie definite in coordinate cartesiane rettangolari dell'equazione

$$\rho = f(x, y, z),$$

ove ρ è un parametro variabile dall'una all'altra delle superficie della famiglia, ammettano delle trajettorie ortogonali piane, f deve soddisfare ad un'equazione alle derivate parziali di 3.° ordine, della quale si chiede lo studio.

2.° Si potrà utilizzare anche il metodo perimorfico, ispirandosi al *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (Journ. de Math. pure et appliquées, IV Serie, T. VII, 1891) del Ribaucour, e particolarmente al Cap. XIII intitolato « Ricerca delle trajettorie ortogonali piane delle superficie » Premio una medaglia d'oro del valore di 500 lire.

Digitized by Google

Le memorie dei concorrenti devono essere scritte in francese od in latino, e dirette anonime entro il Dicembre 1900 alla Segreteria dell'Accademia di Tolosa, Port Saint-Etienne 26.

* * *

DUE RISURREZIONI. — *El progreso matemático*, che uscì regolarmente dal 1891 al 1895 sotto la direzione di Don Zoel G. de Galdeano, professore nell' Università di Saragozza, riprende le sue pubblicazioni, inaugurando una nuova serie. L' egregio direttore dichiara gli intenti della pubblicazione in una introduzione così nobile ed elevata, che è da augurare alla sua patria che la sua impresa sia coronata dal più completo successo.

Circa nello stesso tempo la Società fisico-matematica del Würtemberg ha cominciato una nuova serie de' suoi Atti (*Mittheilungen Mathematisch-naturwissenschaftlicher Vereins in Würtembery*) affidandone la direzione a O. Boklen ed E. Wölffing. Nel piano di questa nuova pubblicazione periodica notiamo — oltre agli scritti originali ed alle recensioni — un elenco *Questioni*, un catalogo di memorie recenti (destinato a completare quelli inseriti nella *Zeitschrift für Mathematik und Physik)* e specialmente la rubrica originale ed interessante intitolata « Bibliografischer Fragekasten »; e per dare un' idea dello scopo di questa diremo che contiene, per quanto concerne il n.° 1 delle *Mittheilungen*, la bibliografia delle quartiche piane dotate di tre punti doppi.

* * *

I FIGLI DI C. F. GAUSS. Il grande matematico, della cui laurea dottorale sta per ricorrere il centesimo anniversario il 16 Luglio di quest' anno, ebbe due mogli; dalla prima nacquero due maschi (Giuseppe e Luigi) ed una femmina (Minna), e altrettanti dalla seconda (Eugenio, Guglielmo e Teresa). Luigi morì nell' infanzia, Eugenio e Guglielmo si trasferirono in età matura in America, di Giuseppe esiste tuttora un figlio (Carlo) ad Hameln (Hannover); Teresa fu la consolazione ed il sostegno del padre negli ultimi anni della sua esistenza. Sopra tutte queste persone il sig. Florian Cajori dà estesi e precisi ragguagli in un interessante articolo del giornale americano *Science* (Vol. IX, n. 229, 19 Maggio 1899), al quale ricorreranno i futuri biografi del sommo scienziato, se non altro per prendere cognizione di due lettere, sinora inedite, che egli scrisse al figlio Eugenio il 15 Febbraio 1844 ed il 9 Agosto 1846.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1899.

Digitized by Google

OTTOBRE, NOVEMBRE E DICEMBRE 1899.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA

E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*. Università di Genova.

SOMMARIO

G. VACCA, *Sui manoscritti inediti di Leibniz.*

Recensioni ed annunzi: NIKOLAJ IWANOWITSCH LOBATSCHEFSKIJ. *Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen uebersetzt,* [G. L.]. — F. DE HEUSCH. *Cours d'analyse.* [G. Vivanti]. — A. WALTER. *Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung* [A. Viterbi]. — T. REYE. *Die Geometrie Lage.* I. [G. L.]. — GIOVANNI VAILATI. *Alcune osservazioni sulle questioni di parole* [G. L.] — F. PASCAL. *Die Variationsrechnung* [G. L.]. — A. GENOCCHI. *Differentialrechnung und Grundzuge der Integralrechnung, herausgegeben von* G. PEANO. [G. L.]. — W. W. BEMAN *and* D. E. SMITH. *New plane solid geometry* [G. L.]. — P. MUTH. *Theorie und Anwendung des Elementartheiler* [G. L.]. — M. D'OCAGNE. *Traité de nomographie* [G. Vivanti]. — ERNEST DUPORCQ. *Premiers principes de geometrie moderne* [G. L.]. — M. CURTZE. *Nicolaus Copernicus* [G. L.]. — IVAN ALEXANDROFF. *Problemes de géometrie élémentaire* [G. L.]. — GIULIO VIVANTI. *Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche* [G. L.]. — GIACOMO BELLACCHI. *Lezioni ed esercizi di Algebra complementare* G. L.]. — E. PASCAL. *Repertorio di matematiche superiori.* II. G. L.]. — LUIGI BIANCHI. *Teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche* [F. G.]. — H. BROCARD. *Notes de Bibliographie des Courbes geométriques. Partie complémentaires* [G L.]. — J. PETERSEN. *Vorlesungen uber Functionstheorie* [G. Vivanti].

Programmi e riassunti di corsi universitari. *Università di Pisa. Corso di Meccanica razionale, 1899-1900* [Gian Antonio Maggi].

Notizie: *Tema proposto dalla Società Jablonowski per l'anno 1902. — Pei collettori di modelli di matematica. — I principî fondamentali dell'algebra — The American Mathematical Society. — Recenti pubblicazioni matematiche russe. — I classici delle scienze esatte. — Un nuovo papiro matematico. — Ai cultori della geometria degli iperspazi. — Ricerche di G. Bolyai sui numeri immaginari. — Giubileo di M. Cantor.*

SUI MANOSCRITTI INEDITI DI LEIBNIZ

Nota di GIOVANNI VACCA

Nel mese di Agosto ho potuto, per pochi giorni, consultare alcuni dei manoscritti di Leibniz conservati nella biblioteca Reale di Hannover, grazie alla cortesia del Bibliotecario.

Per rendersi conto della vastità della raccolta dei manoscritti Leibniziani basta consultare i cataloghi pubblicati con somma cura e diligenza dal dottor Edoardo Bodemann (1).

(1) *Die Leibniz—Handschriften* der Königlichen öffentlichen Bibliotek zu Hannover. Beschrieben von Dr. Eduard Bodemann, Königl. Rath und Ober-Bibliotekar. Hannover, Hahn a. 1895.

Der Briefwechsel des Gottfried Wilhelm Leibniz etc. Beschrieben von Dr. Eduard Bodemann, etc., Hannover, Hahn, a. 1889.

Digitized by Google

Io mi ero proposto però due ricerche, assai semplici, ma, credo, di un certo interesse: ed è dei risultati di esse che intendo dare notizia.

I. *Leibniz aritmetico.*

Fino dal 1894 ho osservato (1) come a Leibniz si debba attribuire la prima dimostrazione di un noto teorema di Fermat.

Però dagli scritti pubblicati dal Gerhardt mi riusciva impossibile di vedere per quale via Leibniz fosse arrivato, quasi senza sforzo, ad un risultato a cui pervenne poi penosamente Eulero.

In MATHEMATIK vol. 3 B fasc. XI si trovano molte redazioni e rifacimenti del teorema, che lasciano quasi scorgere il processo della ideazione nella mente di Leibniz.

Esse ci permettono inoltre di fissare la data della scoperta di questo teorema anteriormente al 1683, (2) e così pure la data della scoperta dello sviluppo delle potenze intere dei polinomi anteriormente al 1678 (3).

Inoltre egli intravide anche il teorema di Wilson (4), come risulta dall'enunciato seguente (MATH. III B 11 fol. 10):

« *Productus continuorum usque ad numerum qui antepraecedit datum divisus per datum relinquit 1* (vel complementum ad unum?) *si datus sit primitivus. Si datus sit derivativus relinquet numerus qui cum dato habeat communem mensuram unitate majorem* ».

Egli non giunse però a dimostrarlo.

Forse altri risultati notevoli si potrebbero trovare con un più attento esame.

Da quanto ho potuto vedere mi sembra risulti che Leibniz era penetrato assai innanzi nella conoscenza dei misteri dei numeri, e che soltanto circostanze sfavorevoli gli impedirono di pubblicare i risultati a cui era pervenuto.

Mi sembra altresì che il Gerhardt sia stato mosso nel classificare gli scritti inediti da pubblicarsi sopratutto dal criterio di far conoscere soltanto i lavori compiuti o pressochè compiuti.

Questo procedimento, lodevole per altri scrittori, non soddisfa affatto alla mente così vasta e piena di idee del nostro Autore. Sopprimere i frammenti incompleti equivale a perdere molte cognizioni che oggi possono interessarci, anche non solamente dal punto di vista storico.

(1) *Bibliotheca mathematica* publ. par G. Enestrom a. 1894 t. 8 p. 46.

(2) In un foglietto (MATH. III B 17 fol. 3) datato *1 Iun 1683* si legge « *Aequatio primitivi. Hic tandem arcanum illum detexi* .... $2^{y-1}-1:y$ *estinteger* .... ».

(3) Questo sviluppo assieme alla notazione usata da Leibniz corrispondente a uno dei significati con cui oggi si adopera il segno Σ, si trova in un foglio avente la data September 1678, (Math. III A 3 fol. 16).

(4) Pubblicato da Waring nelle sue *Meditationes algebraicae* ed. III Cantabrigiae a. 1782 p. 380, e dimostrato poco dopo da Lagrange.

Digitized by Google

Soltanto una riproduzione completa e fedele di cui abbiamo già splendidi esempi nelle collezioni di Leonardo da Vinci, di Cristiano Huygens e di Galilei, potrà soddisfare adeguatamente alla curiosità scientifica degli studiosi futuri.

II. *La logica matematica in Leibniz.*

La stessa impressione che ho provato per gli scritti aritmetici, si è destata in me ancora più viva per gli scritti concernenti la Logica.

Grazie ad una accuratissima classificazione e numerazione dei mss. filosofici (1), ho potuto constatare che malgrado le successive pubblicazioni parziali di Erdmann (2), Trendelenburg (3), Gerhardt (4), molte cose ancora stanno nascoste nei mss. inediti, che possono interessare specialmente i cultori della logica matematica.

La maggior parte di questi studi è contenuta nei 73 fogli che compongono il fasc. 2 del vol. VII B *(Philos)*.

Da un rapido esame di essi ho trovato che Leibniz conosceva le principali proprietà del segno di negazione, attribuito finora a Segner (5); l'identità del segno di deduzione usato tra classi e proposizioni; alcune delle interessanti relazioni che passano tra i simboli della logica e le proposizioni sulla divisibilità dei numeri interi (6); ed infine la così suggestiva ed elegante rappresentazione delle forme di ragionamento mediante sistemi di circoli, ordinariamente attribuita ad Eulero (7).

Un preciso esame delle scoperte di Leibniz relative alla logica matematica, che uscirebbe dall'indole di questa nota, sarà tra breve pubblicato nel *Formulaire de mathématiques* N.° 3.

III. *Conclusione.*

I mss. finora inediti sono in tale numero, che la loro pubblicazione completa supera forse la misura dei contributi dati finora ad imprese di questo genere (8).

---

(1) I mss. filosofici sono stati riordinati dal Dr. Bodemann; quelli matematici invece dal Gerhardt, meno felicemente. (Si veda Bodemann, *Die Leibnize Handschriften* etc. p. 283).

I fogli volanti della parte matematica non sono numerati: cosicchè ne è difficile ed incerta la citazione.

(2) *Opera philosophica quae extant ..... omnia*, ... instruxit I. E. Erdmann, Berolini, Eichler a. 1840.

(3) Memorie dell'accad. di Berlino a. 1856.

(4) C. I. Gerhardt, *Die philos. Schriften von Leibniz*, Berlin. Weidmann, a. 1890, t. 7.

(5) Vedi *Formulaire de Mathématiques*, publ. par la *Rivista di matematica*, t. 2, N° 1, Turin 1897, pag. 7.

(6) id. id. t. 3, N° 2 a. 1898 pag. 47, P. 323-6.

(7) *Lettres à une Princesse d'Allemagne*, a. 1768. Si confronti con Leibniz mss. Philos. VII B 4.

(8) La sola corrispondenza di Leibniz consta di oltre 15000 lettere, a più di 1000 corrispondenti, e gli scritti inediti di matematica e di filosofia, almeno nelle parti che ho potuto consultare, superano la mole di quelli già editi.

Digitized by Google

Però mi sembra che la riproduzione fotografica dei mss. concernenti la logica non presenti notevoli difficoltà; e che si potrebbero pure pubblicare i più interessanti frammenti inediti concernenti le matematiche (ricorrendo anche, per alcuni, alla riproduzione fotografica). Si avrebbe così modo di soddisfare, in breve tempo, i più vivi desideri degli studiosi di Guglielmo Leibniz.

Torino, Novembre 1899.

RECENSIONI ED ANNUNZI

NIKOLAJ IWANOWITSCH LOBATSCHEFSKIJ. *Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen uebersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers*, von FRIEDRICH ENGEL. 8° gr. p. XVI + 476. Leipzig, Teubner 1899. [Prezzo Mk. 14].

È questo il I Vol. di una collezione di opere che i signori F. Engel e P. Stäckel intendono pubblicare sotto il titolo generale di « Fonti per la storia della geometria non-euclidea » in continuazione della loro ottima opera *Die Theorie de Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1896). Le due memorie che ivi compaiono per la prima volta in forma accessibile ai molti ignari della lingua russa, sono quelle che vennero pubblicate una negli anni 1829-30, l'altra nel 1835, la prima col titolo *Sui principii della geometria*, l'altra con quello di *Nuovi principî della geometria*. Esse costituiscono un trattato completo di geometria non-euclidea, corredato di numerose applicazioni alla determinazione di lunghezze, aree, volumi; le ottime osservazioni ed i numerosi commenti di cui le corredò l'egregio traduttore varranno indubbiamente a far scomparire le difficoltà che presenta l'intelligenza di un autore talora eccessivamente conciso.

In seguito della traduzione e delle note (1), il sig. Engel pose una nuova biografia dell'autore; benchè la vita del Lobatschefskij fosse già ben conosciuta grazie ad una notissima memoria del Janischefskij e ad un interessante discorso del Vassilief, pure il sig. Engel, attingendo nuove informazioni ed approfittando abilmente dei preziosi materiali adunati nell' « Archivio Gauss » di Gottinga, ha saputo rendere più perfetto il ritratto del celebre rettore dell' Università di Kasan. Ecco gli argomenti trattati negli undici capitoli in cui ripartì la sua narrazione: I. *Giovinezza e anni di università di L. Il suo maestro Bartels.*

(1) A queste note collaborò efficacemente lo Stäckel.

Digitized by Google

II. *Principio dell'operosità didattica di L. Condizioni dell'Università. Primi saggi nel campo della geometria.* III. *Riforma ed amministrazione di Magnizkij. Insegnamento di L. durante tale epoca.* IV. *Un trattato inedito di geometria dell'anno 1823.* V. *Caduta di Magnizkij. L. presenta alla Facoltà fisico-matematica la sua nuova geometria.* VI. *Gli scopritori della geometria non-euclidea: Gauss, Schweikart, Taurinus, Lobatschefskij, J. Bolyai.* VII. *L. come rettore dell'Università di Kasan, 1827-1846.* VIII. *Pubblicazioni scientifiche di L., in particolare i suoi lavori geometrici durante il periodo 1827-1846.* IX. *Gli ultimi anni di vita. L. come uomo e come maestro.* X. *Stile di L. Ulteriori notizie sopra i suoi lavori geometrici. Suoi scritti di analisi.* XI. *Dimenticanza in cui caddero le opere di L. Tardo riconoscimento delle sue scoperte.*

Uno speciale valore possiede il Cap. VI, nel quale il sig. Engel dal campo ristretto della biografia spicca il volo verso le regioni più alte occupate dalla storia delle idee, nel quale egli interrompe la narrazione degli eventi in cui Lobatschefskij fu attore per risolvere la fondamentale questione storica nata dalla pretesa influenza di Gauss su *tutti coloro* che contribuirono alla creazione della geometria non-euclidea. Tenendo conto del fatto che Giovanni Bolyai fu figlio di un condiscepolo ed amico di Gauss, e che Lobatschefskij fu allievo del Bartels, il quale, nella sua adolescenza, fu avvinto a Gauss da stretta amicizia, si era creduto che i pensieri del grande matematico di Gottinga fossero stati trasferiti nella lontana Transilvania ed all'estremo Oriente della Russia per trovare suolo e clima addatti al loro completo sviluppo: sicchè, in ultima analisi, la geometria non-euclidea sarebbe tutta creazione di Gauss. Questa tesi, oltre all'appagare la boria nazionale (per usare l'espressione classica di G. B. Vico) dei tedeschi, porge una spiegazione soddisfacente dell'affinità che esiste fra le idee del professore Russo e quelle del capitano Ungherese; perciò ha trovati numerosi sostenitori (1). Ora le ricerche dell'Engel (condotte con tale acume e tanta diligenza da meritare il nome di esaurienti) costringono ormai ad abbandonarla; esse infatti portano a concludere che i due geometri succitati furono spontaneamente condotti ad occuparsi del problema che erano destinati a risolvere e che d'altronde le idee definitive di Gauss sul postulato di Euclide sono posteriori all'epoca in cui egli ebbe rapporti scientifici con W. Bolyai e

(1) Il più illustre fautore di questa tesi è F. Klein, il quale, seguendo l'influenza di una tradizione esistente a Gottinga, asserì non esistere alcun dubbio che tanto Lobatschefskij, quanto i Bolyai, debbono a Gauss l'enunciato della questione che studiarono » (*Nicht-Euklidische Geometrie*, I, Göttingen 1892, p. 176) e confermò questo suo modo di vedere in una pubblica seduta del Congresso di Chicago (v. l'importante articolo bibliografico, sull'opera di cui ci occupiamo, inserito da G. Bruce Halsted in *Science*, 9 June 1899).

Digitized by Google

col Bartels: « ci troviamo adunque in presenza al fatto notevole » (scrive a ragione l'A.) « che nel corso di poco più d'un decennio quattro persone indipendentemente l'una dall'altra scopersero la maniera di sormontare la difficoltà che risiede nella teoria euclidea delle parallele, primi Gauss e Schweikart, a quanto pare circa nel medesimo tempo, e poi, pure circa contemporaneamente, Lobatscheĭskij e Bolyai ». « Quasi ancor più sorprendente di quel fatto » (aggiunge il sig. Engel) « è l'altro che venne allora rinvenuta una sola delle due soluzioni dell'enigma delle parallele. Sembra infatti che alla mente di nessuno fra essi siasi affacciata la possibilità di una geometria del piano immune da contraddizioni ed in cui la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti. Nessuno di essi sembra avesse giudicato valere la pena di indagare più a fondo quest'ipotesi intorno alla somma degli angoli di un triangolo e di svolgerne le conclusioni, cosa che avevano dianzi già fatto Saccheri e Lambert ».

G. L.

F. DE HEUSCH. *Cours d'analyse. — Calcul différentiel.* Bruxelles, Castaigne; Paris, Hermann; 1898; 278; p. 8.°

L'opera, di cui abbiamo dinanzi la prima parte, è un corso di calcolo infinitesimale ad uso della Scuola militare di Bruxelles. Il contenuto di questo primo volume è, press'a poco, quello della maggior parte dei trattati congeneri, salvo qualche sviluppo in più nella teoria delle superficie. L'esposizione è chiara e semplice, e, in generale, rigorosa; fanno eccezione alcuni punti, di cui segnaliamo i principali.

I concetti di funzione implicita (p. 2, 3, 46-47) e di funzione inversa (p. 32) sono introdotti senza un previo esame sulle condizioni d'esistenza di tali funzioni.

La dimostrazione del teorema sulla derivazione delle funzioni di funzione (p. 34) è incompleta.

La formola:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \qquad (1)$$

viene stabilita (p. 57-58) mediante applicazione erronea del « teorema » evidente, che, se $f(x, \alpha_0) = 0$ per tutti i valori di x compresi in un certo intervallo, ne segue

$$\frac{df(x, x_0)}{dx} = 0$$

in tutto l'intervallo stesso. Posto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

Digitized by Google

(dove ε è funzione di x e Δx che si annulla per ogni valore di x quando $\Delta x = 0$), e quindi:

$$\frac{\Delta \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2} = \frac{\Delta f'(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x},$$

l'autore osserva che pel teorema eccennato si ha:

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x} = 0, \qquad (2)$$

donde segue la (1). Ma, se scriviamo $\varepsilon = \varphi(x, \Delta x)$, dove $\varphi(x, 0) = 0$, il teorema ci dà soltanto:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, 0) - \varphi(x, 0)}{\Delta x} = 0, \qquad (3)$$

mentre la (2), sotto forma sviluppata, è:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, \Delta x) - \varphi(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0; \qquad (4)$$

e nulla dimostra che le (3), (4) debbano sempre coesistere. Anzi una prova in contrario si ha dal fatto che l'autore, mediante lo stesso ragionamento, stabilisce (p. 71-72), affatto in generale, il teorema sull'invertibilità dell'ordine delle derivazioni, mentre è noto che questo teorema sussiste soltanto sotto certe condizioni restrittive.

Infine la teoria dei massimi e minimi delle funzioni di più variabili (p. 148 e segg.) è svolta in modo tutt'altro che rigoroso.

G. Vivanti.

A. Walter. — *Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung.* Leipzig, Teubner 1898. 8° gr., p. VII + 74. [Prezzo Mk. 2.80].

« Il progresso che quest'opera rappresenta rispetto alle altre sull'argomento, che la precedettero, consiste precipuamente nell'aver dato il metodo, con cui calcolare quelle quantità, la cui determinazione è oggetto del problema trattato nell'opera stessa, in base ad ipotesi affatto generali, senza cioè che si debba fare restrizione alcuna relativamente all'indice di rifrazione n dell'atmosfera ». Ciò premesso, ecco un riassunto sommario del contenuto dell'opera. Questa si divide in due parti: la prima esclusivamente matematica; la seconda dedicata maggiormente al lato fisico-meteorologico del problema.

Nella prima parte è contenuta la risoluzione di questo problema diottrico: « Dato un mezzo trasparente, il cui indice assoluto di rifrazione sia variabile, e nel quale le superficie d'indice di rifrazione costante siano sfere concentriche, devesi determinare come si diffonda

Digitized by Google

la luce in un mezzo siffatto. » I risultati di tale ricerca vanno poi applicati al caso speciale, in cui il mezzo trasparente sia l'atmosfera terrestre. Il primo capitolo è dedicato appunto all'enunciato del problema ed alle relative spiegazioni.

Nel secondo capitolo l'A. stabilisce l'equazione differenziale delle linee (curve) percorse dalla luce, in due modi diversi. Ora, detto B il punto che viene osservato, A il punto ove trovasi l'osservatore, O il centro della terra (nell'ipotesi che le ricerche si riferiscano all'atmosfera terrestre) le grandezze da determinarsi sono: « I.ª La distanza O B ». « II.ª L'angolo formato dalla tangente alla curva luminosa in B con O B ». « IIIª L'angolo della tangente in B con quello in A ». « IV.º La distanza del punto d'incontro D della tangente in A col prolungamento di O B, dal centro O ». « V.º la distanza D B ». « VI.ª La distanza (rettilinea) A B ». « VII.º La lunghezza del tratto A B della curva luminosa ». « VIII.ª La rifrazione verticale nei punti A e B ». « IX.ª Il raggio di curvatura nel punto B ».

Queste grandezze vengono determinate, non in cosi detti termini finiti, ma possono all'incontro essere rappresentate soltanto mediante serie di potenze. I coefficienti delle singole serie di potenze in discorso vengono espressi tutti come funzioni delle stesse grandezze, le quali si dicono « coefficienti di rifrazione ». Ora nel calcolo di queste serie di potenze non si assume per l'indice di rifrazione n una speciale funzione ma, come gia fu detto, tale funzione è lasciata completamente arbitraria. Perciò le formole stabilite nel presente lavoro, possono venire applicate, qualunque sia la funzione assunta come indice di rifrazione. Cio costituisce pertanto un notevole vantaggio che hanno queste formole di fronte a quelle che sino ad ora vennero usate.

Nel terzo capitolo vengono esaminate le formole già stabilite in generale, relativamente a casi particolari. (Ad es. « Rifrazione astronomica dei raggi ». « Limitazione dell'orizzonte ». ecc. ecc.).

Ed ora tratteremo brevemente del contenuto della seconda parte del lavoro del Walter. In questa seconda parte, come s'è detto, viene trattato il lato fisico e meteorologico del problema. La questione fondamentale che qui viene studiata è la determinazione della funzione che rappresenta l'indice di rifrazione dell'atmosfera terrestre. Seguono quindi considerazioni intorno alla connessione che v'è fra indice di rifrazione e densità dell'aria e alla dipendenza della densità dell'aria dalla pressione, dall'umidità e dalla temperatura: finalmente è studiata la dipendenza di queste tre ultime quantità dell'altezza sopra la superficie terrestre. Tale studio ha per scopo di determinare l'indice di rifrazione come funzione dell'altezza sopra la superficie terrestre. Ma, a questo proposito l'A. fa preventivamente osservare come

Digitized by Google

non sia possibile, coi mezzi di cui attualmente dispone la scienza, risolvere completamente tale questione, perchè non si conosce con precisione la temperatura come funzione dell'altezza sopra la superficie terrestre. Tutto questo costituisce la materia trattata nel primo capitolo (che è il quarto dell'opera) della seconda parte. Nel capitolo successivo è fatta un'applicazione dei risultati testè accennati: l'applicazione consiste cioè nel calcolo dei coefficienti degli sviluppi in serie, considerati nel primo capitolo. Con ciò queste serie acquistano importanza per la pratica. Le considerazioni ed i risultati che sono contenuti in quest'ultimo capitolo sono importanti specialmente per l'ingegnere e il geodeta. La chiusa del libro consiste in calcoli relativi a studi su rifrazioni e in ricerche intorno al calcolo dell'abbassamento della temperatura (l'espressione di tale quantità è $\frac{d\,t}{d\,h}$ ove t designi naturalmente la temperatura, h l'altezza sopra la superficie terrestre del punto a cui si riferisce l'osservazione) mediante osservazioni sulla rifrazione.

L'intento propostosi dall'A. di dare forma rigorosamente matematica alla trattazione del problema studiato e di liberare i calcoli da ipotesi troppo restrittive fu egregiamente raggiunto. Le formole generali poi, stabilite nella prima parte hanno il vantaggio che, per il loro calcolo, si dispone di varii indici di rifrazione e non di uno solo, come accadeva nelle teorie precedenti. Con ciò si guadagna molto in rapidità di calcoli. A. VITERBI.

T. REYE. *Die Geometrie der Lage. Vorträge. Erste Abtheilung.* Mit 90 Abbildungen im Text. IV verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig. Baumgärtner's Buchhandlung, 1899. 8.° p. XIV + 296.

Nella quarta edizione il celebre trattato del Prof. Reye non ha subito alterazioni nel suo piano generale, ma è stato migliorato in molti punti (si può dire che non v'ha pagina la quale non sia stata più o meno ritoccata) e si è arricchito di notevoli aggiunte. In particolare le lezioni da 15 divennero 18 per l'inserzione — dopo la XIII — di tre aventi per temi risp.: « Coniche omofocali. Normali e raggi di curvatura. Ellissi ed iperboli concentriche ed omotetiche; parabole omotetiche congruenti »; ivi presero posto le belle ricerche consegnate dal Reye nella memoria *Beweis einiger Sätze von Chasles über confocale Kegelschnitte* pubblicata due anni or sono. Anche la raccolta di esercizii si accrebbe, sicchè or ne abbraccia 247 invece di 223; essa, fra l'altro, comprende delle osservazioni nuove ed interessanti sopra i coni concentrici e confocali oppure conciclici. Tutto ciò è sufficiente ad assicurare alla IV ediz. dell'opera del Reye il successo che ebbero l'originale nelle edizioni precedenti e le versioni italiana, francese ed inglese.

Digitized by Google

Ci sia lecito prima di finire questo resoconto di notare un equivoco in cui l'autore è caduto nell'esercizio 88 (pag. 244). Ivi è fatto cenno della ippopeda di Eudosso, come se fosse una curva piana; essa invece è (secondo la divinazione dello Schiaparelli) una curva sferica che si può intendere definita da due delle equazioni seguenti:

$$x^2+y^2=ax, \quad x^2+y^2+z^2=a\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{b^2}x^2.$$

Forse il Reye alludeva alla projezione dell'ippopeda sul piano xy, cioè quella che — secondo le congetture di P. Tannery — apparterebbe alla classe delle καμπύλων γραμηῶν di Eudosso di Cnido. Però allora la curva avrebbe bensì la forma di un otto rovesciato (∞), ma non sarebbe l'inversa o la podaria di un'iperbole: essa infatti ha per equazione

$$y=\frac{x\sqrt{a^2x^2-b^4}}{b^2},$$

onde non è bicircolare, come lo sono quelle due curve dedotta dall'iperbole. Per l'identica ragione l'ippopeda e le sue projezioni non appartengono nemmeno alle spiriche di Perseo, come ritiene l'eminente autore. G. L.

Dott. Giovanni Vailati. *Alcune osservazioni sulle questioni di parole nella storia della scienza e della cultura.* Prolusione al Corso libero di storia della meccanica letta il 12 Dicembre 1898 nell'Università di Torino. Torino, Bocca, 1899, 8.° gr., pag. 39. [Prezzo Lire 1.50].

Le questioni di parole, se non occupano un posto considerevole nella storia della matematica pura, rappresentano una parte importante in quella delle discipline fisico-matematiche, giacchè da semplici equivoci dovuti ad imprecisione di linguaggio ebbero origine lunghe e vivaci controversie, mentre, per compenso, delle felici ardite metafore furono feconde di notevoli progressi. Perciò l'esame di siffatte questioni non spetta soltanto al filosofo ed al letterato, ma fa parte della storia della scienza; a ragione pertanto il Vailati lo scelse come tema alla prolusione del terzo dei suoi corsi sulla storia della meccanica. La vasta cultura ed il fine spirito critico di cui l'autore dispone lo rendono idoneo a trattare questo non facile tema, sicchè chi legge l'opuscolo che annunciamo non trova da lamentare se non l'angustia dei limiti entro cui venne forzatamente ristretto lo svolgimento e da augurare che l'autore trovi ben presto occasione per ritornare con maggior larghezza sull'argomento. G. L.

Digitized by Google

E. PASCAL. *Die] Variationsrechnung. Autorisierte deutsche Ausgabe von* A. SCHEPP. Leipzig, G. B. Teubner, 1899, 8.° gr., p. VI + 146. [Prezzo del vol. legato Mk. 4].

È la traduzione tedesca della prima parte del ben noto « Manuale Hoepli » pubblicato dal Prof. Pascal nel 1897 col titolo *Calcolo delle variazioni e Calcolo delle differenze finite.* Il traduttore completò il suo lavoro con un elenco di tutti gli scritti citati e con un indice analitico degli argomenti svolti: il che rende più utile, come libro di consultazione, l'ottimo manuale in discorso. G. L.

ANGELO GENOCCHI. *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, herausgegeben von* GIUSEPPE PEANO. *Autorisierte deutsche Uebersetzung von* G. BOHLMANN *und* A. SCHEPP. *Mit einem Vorwort von* A. MEYER. Leipzig, Teubner, 1899, 8.° pag. VII + 399 (Prezzo del vol. legato Mk. 12).

Questo libro — che servì di base all'istruzione nel calcolo infinitesimale di più migliaia di giovani — è tanto e così favorevolmente noto in Italia che il ritesserne l'elogio a proposito della traduzione che ne annunciamo è superfluo. Superfluo è pure descrivere il contenuto delle cinque note aggiunte alla versione stessa, dal momento che esse sono estratte da lavori pubblicati dal Peano in raccolte italiane diffusissime. Ci sembra invece opportuno riferire qui la prefazione in cui il chiaro matematico A. Mayer espone le ragioni per cui egli ha favorita ed incoraggiata l'opera dei due traduttori; è in gran parte una pagina di storia del calcolo differenziale: « L'opera pubblicata da G. Peano nell'autunno del 1884 col titolo *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, non solo è un modello di esposizione precisa e di argomentazioni rigorose, di cui sarebbe vano negare il benefico influsso sopra tutti i più grandi trattati di calcolo differenziale ed integrale usciti di poi, ma diede anche la spinta ad un nuovo fecondo sviluppo specialmente col segnalare nelle note degli errori inveterati. Tuttavia molti degli errori ivi segnalati non erano allora sconosciuti (come è rilevato in tono stranamente energico nella recensione di quell'opera, che si legge nel *Jahrbuch über die Forschritte der Mathematik*, 1884, p. 223), poichè specialmente in Germania una direzione più rigorosa era stata tracciata dagli *Elemente der Differential- und Integralrechnung* dell'Harnack e dall'*Einleitung in die Differential-und Integralrechnung* del Pasch. Ma nei casi in cui le relative osservazioni erano già state fatte, le note indicano sempre coscienziosamente le fonti originali; ve ne sono però anche di prive di citazioni siffatte. Più d'ogni altra la nota ai Nr. 133-136 contiene quachecosa

Digitized by Google

di totalmente nuovo, e l'importante obbiezione (non menzionata nè dal *Jahrbuch* nè nella recensione inserita nel *Bulletin des sciences mathématiques,* 1885, p. 170, ma di cui subito tenne il debito conto l'Harnack negli emendamenti alla versione tedesca del *Cours de calcul différentiel et intégral* del Serret) dimostrò ad evidenza come tutta l'antica teoria degli ordinarî massimi e minimi esigesse una sostanziale trasformazione. Il Peano non si è limitato a dimostrare l'erroneità della vecchia teoria sopra l'esempio più semplice immaginabile, ma, di quanto trovasi in essa di esatto, ha suggerito nel Nr. 135 la prima dimostrazione rigorosa. Ora, se anche L. Scheeffer, indipendentemente dal Peano, aveva per conto suo percepito il difetto di quella teoria, egli si servì appunto dell'esempio del Peano (*Math. Annalen.* T. XXV, p. 515) per dimostrare l'insussistenza di uno dei metodi che venivano dianzi più spesso adoperati onde gettarne le basi. Sicchè, in ultima analisi, dal libro del Peano rampollano tutti i lavori, così belli ed in gran parte fondamentali, di Scheeffer, Stolz e v. Dantscher, che svolgono la nuova teoria rigorosa dei massimi e minimi delle funzioni a due variabili e ne preparano la estensione a n variabili. Possedere una buona traduzione di un'opera, che, non solo per prima è pienamente esente da errori ed inesattezze inveterati, ma che inoltre penetra così a fondo in un campo considerato prima per elementarissimo, era un bisogno da lungo sentito, epperò l'apparizione di un'edizione tedesca autorizzata non può che riuscire sommamente gradita al pubblico matematico, prescindendo anche dalle importanti aggiunte fatte dall'autore. Non si tratta di un manuale nel senso ordinario, giacchè tratta per così dire soltanto certi capitoli scelti nel calcolo differenziale e nell'integrale, specialmente non si tratta di un manuale per principianti, che non hanno preparazione sufficiente ad un completo rigore. Ciò non ostante, lo stile limpido in cui il libro è scritto farà sì che chiunque sia famigliare cogli elementi dell'analisi, potrà leggerlo agevolmente e trarne perenne utilità e non comune piacere ».

G. L.

W. W. Beman and D. E. Smith. *New plane and solid geometry.* Boston, Ginn and Co., 1899, 8.° picc. p. IX + 382.

È questa la seconda edizione di un trattato uscito nel 1895 col titolo *Plane and solid geometry.* Benchè non presenti grandi innovazioni di sostanza, pure merita l'attenzione degli insegnanti, non solo per la buona scelta o distribuzione della materia, non solo per l'accuratezza e precisione del dettato, ma per un modo speciale in cui sono presentate le dimostrazioni che mette in luce le varie parti di cui sono costituite e rende più facile percepirne e ricordarne la struttura. La

Digitized by Google

ricca collezione di esercizi e le tavole biografiche ed etimologiche di cui il volume è corredato, ne accrescono il pregio. Ci sia concesso, prima di chiudere questo cenno, di fare una osservazione. Il teorema di Descartes-Eulero è una relazione che sussiste in ogni poliedro convesso; nulla assicura però che ad ogni soluzione della equazione $F + V = S + 2$ corrisponda un poliedro; quindi non ci sembra corretto il concludere, come fanno gli autori (pag. 285), dalla simetria di quest'equazione in F, V, che, se esiste un poliedro di F facce, V vertici e S spigoli, ne esisterà un secondo con V facce, F vertici e S spigoli. Trarre in tal modo siffatta conclusione potrebbe far credere a chi legge che l'equazione riferita è necessaria e sufficiente per l'esistenza di un poliedro convesso, il che non è. G. L.

P. Muth. *Theorie und Anwendung des Elementartheiler*. Leipzig, Teubner, 1899, 8.° gr., pag. xvi + 236 (Prezzo Mk. 8).

Un considerevole numero di questioni analitiche e geometriche esige si sappia ridurre una coppia di forme quadratiche omogenee ad una forma canonica, possibilmente ciascuna ad una somma di quadrati. Come è noto siffatta riduzione poggia culla considerazione del « determinante del fascio » che individuano le due date forme ed è facilissima quando questo determinante si possa decomporre in un prodotto di funzioni lineari. Ma nel caso generale esige l'impiego di sottili procedimenti, a base dei quali sta quelli che il Weierstrass — generalizzando e perfezionando un concetto adombrato dal Sylvester — ha introdotto nella scienza sotto il nome di *divisori elementari*. Questi gli permisero di dare del problema algebrico suddetto una soluzione, non soltanto generale ed esauriente, ma applicabile anche al problema più generale di ridurre a forma canonica due forme bilineari con $2n$ variabili ciascuna. Complementi notevoli alle investigazioni del Weierstrass vennero in seguito dati dal Kronecker e dai discepoli di questi due sommi rcienziati; sicchè al giorno d'oggi la teoria alla quale esse si riferirono può giudicarsi nel suo insieme completa; siccome d'altronde le occasioni in cui venne applicate sono numerose e sembrano in procinto di moltiplicarsi, così giudiziosa e lodevole fu l'idea del sig. Muth di coordinare tutte le indagini aventi per germe o sostegno il concetto di divisore elementare. Ebbe vita così la pregevole opera che annunciamo: la quale, pei suoi meriti intrinseci e per l'interesse generale che possiede, ha già un posto assicurato nella biblioteca di qualunque matematico. Tanto più che l'A., non pago di esporre la parte prettamente dottrinale della teorica dei divisori elementari, ne fece conoscere la più vasta delle applicazioni geometriche che ricevette, cioè la classificazione delle collineazioni in un spazio lineare a

Digitized by Google

quante si vogliano dimensioni; mentre per comporre la parte teorica del suo lavoro si giovò quasi esclusivamente di scritti tedeschi, per quest'ultima attinse largamente a memorie italiane e, in particolar modo, a quelle ben note del Segre. G. L.

M. D'OCAGNE. *Traité de nomographie. Theorie des abaques. Applications pratiques.* Paris, Gauthier-Villars, 1899, p. XIV-480, in 8.°

L'autore, che, come è noto, da molti anni si occupa di questioni attinenti al calcolo grafico, espone ora sistematicamente, in un grosso volume, la *Nomografia*, cioè quella dottrina che ha per iscopo di ridurre la risoluzione d'un'equazione o d'un sistema d'equazioni « à de » simples lectures sur des tableaux graphiques, construits une fois » pour toutes ». Queste tavole grafiche hanno il nome di *abachi;* e noi cercheremo di farne comprendere la struttura nei casi più semplici.

Abbiasi un'equazione:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, \qquad (1)$$

dove α_3 si consideri come la variabile dipendente. Presi ad arbitrio due *moduli* l_1, l_2, e rappresentati i valori α_1, α_2 delle due variabili indipendenti rispettivamente mediante le due famiglie di rette parallele agli assi:

$$x = l_1 \alpha_1, \quad y = l_2 \alpha_2, \qquad (2)$$

a ciascuna delle curve della famiglia:

$$F\left(\frac{x}{l_1}, \frac{y}{l_2}, \alpha_3\right) = 0, \qquad (3)$$

dove α_3 varia da linea a linea, si assegnerà come *quota* il valore di α_3 ad essa corrispondente. Allora ogni terna di valori che soddisfa all'equazione (1) sarà data dalle quote di 3 linee (delle 3 famiglie) concorrenti in un punto. È sempre possibile alle famiglie di rette parallele (2) sostituirne due altre:

$$x = l_1 f_1(\alpha_1), \quad y = l_2 f_2(\alpha_2),$$

scelte in modo che *una* delle linee (3) si muti in una retta; se poi l'equazione (1) ha la forma:

$$f_1(\alpha_1) f_3(\alpha_3) + f_2(\alpha_2) \varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0,$$

allora, e solo allora, si può fare in guisa che *tutte* le linee (3) si mutino in rette. Una tale trasformazione dicesi *anamorfosi.* Mediante il principio di dualità si possono inoltre trasformare le rette in punti e viceversa; allora le quote di 3 punti allineati appartenenti rispettivamente ai 3 sistemi costituiscono una soluzione della (1).

Digitized by Google

Senza addentrarci di più nell' argomento della presente opera, diremo solo che, dei 6 capitoli di cui essa si compone, il 1.° tratta delle equazioni a due variabili, il 2.° e il 3.° di quelle a tre variabili, il 4.° dei sistemi d' equazioni, il 5.° delle equazioni a più di tre variabili, il 6.° della teoria generale.

I primi 5 capitoli sono interessanti particolarmente dal lato pratico; e ad accrescerne il valore servono i molti esempi, tolti da ogni ramo delle matematiche applicate, che vi trovano il loro sviluppo. Eccone i principali: Spessore delle lenti, rifrazione, rilievi tacheometrici, interessi composti, errori, velocità dei treni, tonnellaggio delle navi, macchine a vapore, portata d' un fiume, distribuzioni d' acqua, sterri, spinta delle terre, muri di sostegno, travi cariche, depressione dell'orizzonte, sorgere e tramontare del sole, luce diffusa.

L' ultimo capitolo ha invece un carattere teorico. In esso l' autore si propone anzitutto il problema di costruire tutti i possibili tipi di abachi per equazioni ad un numero qualunque di variabili; poi quello di determinare la forma generale delle equazioni rappresentabili mediante abachi d' un dato tipo. Come casi particolari di questo secondo problema vengono studiate le equazioni algebriche rappresentabili mediante tre sistemi lineari di punti allineati, e le equazioni quadratiche rappresentabili mediante abachi formati di rette e di cerchi.

Precede l' opera la lista completa degli scritti dell' autore concernenti la nomografia, e la chiude un copioso indice alfabetico.

L' edizione è in tutto degna della illustre casa editrice parigina, e le numerose figure (sono 177) che accompagnano il testo sono eseguite con molta precisione e chiarezza. G. Vivanti.

Ernest Duporcq. *Premiers principes de géométrie moderne à l' usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats à la licence et à l' agrégation.* Paris, Gauthier-Villars, 1899, 8.° p. VII + 160 (L. 3).

« Di anno in anno », scrive l'A., « i corsi di Geometria analitica prendono una estensione più considerevole, a detrimento dell' insegnamento della Geometria, che si trova sempre più negletto. Tuttavia sembra che lo studio dei lavori di Poncelet, Chasles e Laguerre, contribuirebbe, meglio dei varî metodi di discussione dell' equazione in S (1) a sviluppare lo spirito geometrico degli studenti, cosa che dev' essere, benchè spesso ci sembri essere stato perduto di vista, lo scopo precipuo delle Matematiche ». Queste parole rispecchiano uno stato di cose ben noto a coloro che studiano le correnti che seguono nei varî paesi le ricerche

(1) Equazione di cui dipende la ricerca degli assi di in quadrica.

Digitized by Google

matematiche, i quali sanno come in Francia all' indirizzo geometrico dato da Monge e Carnot, Poncelet e Chasles sia stato preferito, dopo la morte di quest' ultimo, e malgrado l' opposizione del Mannheim, lo studio delle questioni in cui l'analisi entra come mezzo o come fine. A porre un argine a questa tendenza intende l' opuscolo che annunciamo, il quale si dirige agli studenti e vuole rendere ad essi accessibili le idee che debbono la vita ed il loro primo svolgimento ai geometri francesi del principio del secolo presente. Le teorie che, secondo il nostro A., costituiscono oggi la *geometria moderna* sono (per dirlo in breve) quelle che hanno il loro fondamento nel *Traité de géométrie supérieure* di Chasles: rapporti anarmonici, omografia, correlazione, inversione; a cui aggiunga la celebre trasformazione di Lie che muta le rette in sfere. Se ad alcuno potrà parere che l'A. ponga troppo modesti confini alla geometria moderna, tutti converranno che egli seppe scegliere con molta arte le applicazioni (alle coniche, alle quadriche ed alle cubiche gobbe) che espone delle teorie fondamentali e che molto opportunamente chiuse il suo lavoro con una buona collezione di esempi. Ma quello che tutti pure lamenteremo è che egli abbia esposta puramente e semplicemente la vecchia ed inconcludente teoria degli elementi immaginari, invece della nuova ideata da Staudt, la quale — pur tacendo di altri vantaggi — abilita a sopprimere il principio di continuità; d' altronde è lecito il non dire, in un' opera sulla *geometria moderna*, che il rapporto anarmonico è un utensile molto meno importante di quanto credevasi? e che le nuove definizioni di projettività ecc., da esso indipendenti, vincono, per ampiezza e purezza, le antiche ?... Questo ho voluto osservare per concludere con un augurio: in questi ultimi tempi, sotto gli auspici dei più grandi analisti francesi viventi le teorie di Riemann e Weierstrass passarono il Reno e ricevettero buone accoglienze dai successori di Cauchy; possano ben presto ricevere in Francia la naturalizzazione le idee, più modeste, ma non meno riformatrici e feconde, che riconoscono in Staudt il loro genitore. G. L.

M. Curtze. *Nicolaus Coppernicus. Eine biographische Skizze.* Berlin, H. Paetel, 1899, 8.° gr. p. 84 (Prezzo Mk. 2).

Questo lavoro venne pubblicato per la prima volta in « Himmel und Erde »; ora fa parte della *Sammlung populärer Schriften herausgegeben von der Gesellschaft Urania zu Berlin*, che già accolse una biografia di Galileo. Chi sa quanti contributi abbia somministrati il Curtze alla letteratura copernicana, della quale egli possiede una conoscenza perfetta, non si meraviglierà di trovare nell' opuscolo che annunciamo un ritratto somigliantissimo del grande riformatore dell' astronomia e una storia fedele delle vicende della sua vita. G. L.

Digitized by Google

IVAN ALEXANDROFF. *Problèmes de géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution. Traduit du russe, sur la sixième edition, par* D. AITOFF. Paris, Hermann, 1899, 8.°, p. XII + 154.

« Come J. Petersen (scrive il traduttore) I. Alexandroff insiste specialmente sui metodi: luoghi geometrici, similitudine, costruzioni inverse, simmetria, traslazione, rotazione, inversione, applicazione dell'algebra alla geometria. Ogni capitolo si apre coll'esposizione del metodo da adoperare. L'autore dà quindi un numero considerevole di problemi tipici, ciascuno colla soluzione completa. Seguono poi gli esercizi che possono venire risolti facilmente. Siccome non è la maggiore o minore difficoltà, nè questo o quel capitolo d'un trattato di geometria che guidarono l'autore nella scelta dei problemi, così si trovano vicini gli uni agli altri, i problemi sulla costruzione di un triangolo, d'un poligono o d'un cerchio, sulla determinazione della direzione di una retta o della posizione di un punto ». — Queste parole caratterizzano la nuova raccolta di problemi di geometria trasferiti dalla Russia sul mercato dell'Europa occidentale. Aggiungiamo che essa comprende quasi un migliaio di problemi sapientemente scelti e ripartiti in quattro capitoli, intitolati: *Proposizioni preliminari, Problemi sulla costruzione delle figure geometriche, Applicazione dell'algebra alla geometria, Problemi misti.* G. L.

GIULIO VIVANTI. *Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche tenute nella R. Università di Messina e raccolte dall'assistente* Dott. FULCO. *Corso dell'anno 1898-99.* Reggio Calabria, litografia Manara 1899, 8.° picc., p. 134 (Prezzo L. 10).

Teoria degli aggregati. I. Equivalenza di due gruppi d'infiniti elementi. Concetto di potenza dei gruppi. Teoremi che ne derivano. II. Aggregati speciali. III. Teoremi sugli aggregati di punti. IV. Numeri transfiniti e loro generazione. V. Applicazione della teoria dei numeri transfiniti allo studio degli aggregati infiniti. VI. Teoremi sugli insiemi perfetti.

Teoria delle funzioni. I. Funzioni dei punti di un campo. II. Serie di potenze. III. Valor medio di una funzione sopra una data circonferenza. IV. Concetto di derivata ed integrale di una serie di potenze. V. Serie dedotte. Funzioni analitiche. VI. Punti singolari per una funzione. VII. Funzioni razionali. Espressioni aritmetiche. VIII. Studio sistematico delle funzioni analitiche. IX. Teoremi sulle funzioni intere. X. Ricerche che si connettono col teorema di Weierstrass. XI. Funzioni analitiche con un solo punto singolare posto a distanza finita.

Digitized by Google

XII. Speciali concetti di continuazione analitica. XIII. Funzioni lineari. XIV Serie di potenze ugualmente singolari. XV. Teoremi di Hadamard e Hurwitz. XVI. Alcune ricerche sul numero e sulla disposizione dei punti singolari di una serie di potenze sulla circonferenza del suo cerchio vero di convergenza. XVII. Ricerche di Pringsheim. G. L.

GIACOMO BELLACCHI. *Lezioni ed esercizi di Algebra complementare.* 8.° Fascicolo I, 1898, p. 159. Fascicolo II, 1899, p. 143. Firenze, Barbèra (Prezzo di ogni fascicolo L. 2).

L'opera di cui annunciamo i primi due fascicoli (senza essere in grado di dire se a questi altri terranno dietro in avvenire) si dirige, piuttosto agli studenti che cominciano la loro carriera universitaria, che a coloro che sono tuttora relegati fra le pareti di una scuola secondaria; quelli troveranno ivi interessanti applicazioni ed ulteriori svolgimenti delle teorie che tradizionalmente vengono insegnate nel I anno di corso delle nostre Università, mentre questi s'imbatteranno spesso leggendola, in nozioni ad essi inaccessibili. La vasta dottrina dell'A. gli concesse di esporre cose poco note e che pur meritavano di ossere divulgate; a quali temi si riferiscono emerge dall'indice seguente: I. Poligoni massimi e minimi. II. Variazioni delle funzioni $y = ax + b$, $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$, $y = ax^2 + 2bx + c$, e linee rappresentatrici. III. Linee quartiche circolari. IV. Massimi e minimi delle funzioni ad una variabile. V. Funzioni algebriche a tre variabili. VI. Frazioni continue ascendenti e discendenti. VII. Frazioni continue periodiche. VIII. Permutazioni semplici di n elementi. IX. Combinazioni semplici. X. Variazioni complete. XI. I fatti probabili. XII. Funzioni degli archi circolari multipli. XIII. Sistemi indeterminati di 1.° grado. XIV. Reciprocità dei numeri primi. G. L.

A. FOSCHINI. — *Teorica e pratica dello squadretto calcolatore* (nuova invenzione). Roma, Tip. A. Carrocci, 18.°, p. 43, 1898.

Il nuovo strumento descritto in questo opuscolo ha per iscopo di risolvere in pratica tutte quelle questioni collegate in qualche modo alla rettificazione della circonferenza, in altre parole di calcolare con approssimazione sufficiente qualsia funzione razionale di π. Esso non è che un'ordinaria squadra da disegno (ed è perciò chiamata *squadretto calcolatore*) i cui cateti stanno fra loro nel rapporto $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; l'angolo opposto al cateto minore in conseguenza ha per seno $\sqrt{\frac{\pi}{4+\pi}}$. Che

Digitized by Google

siffatto semplicissimo apparato soddisfi alle esigenze delle questioni che è chiamato a risolvere, viene dimostrato dall'A. mediante semplicissime considerazioni su 36 problemi interessanti la pratica. Citiamo come esempio i seguenti: 1. Quadratura grafica di un circolo, di dato diametro. 2. Rettificazione di un dato quadrante circolare. 3. Rettificare un arco appartenente ad un certo cerchio, supponendo conosciuto il numero dei gradi che contiene. 4. Data una retta, curvarla ad arco circolare di raggio determinato. 9. Area del settore circolare. 13. Area di un segmento ellittico. 15. Delineazione delle cicloide. 19. Trovare praticamente la superficie convessa di una calotta sferica. 32. Trovare graficamente la tangente di un dato angolo. 36. Trasformare una sfera in un cono retto. — Basti questo cenno a fissare l'attenzione dei pratici sopra il nuovo semplicissimo strumento ideato dall' ing. Foschini.

G. L.

E. Pascal. — *Repertorio di matematiche superiori (definizioni — formole — teoremi — cenni bibliografici).* II. Geometria. Manuale Hoepli, 1900, p. XXVIII + 928 (Prezzo L. 9.50).

Il secondo volume di quest'opera — nella sua prima parte già nota ai nostri lettori (v. *Bollettino,* T. II, p. 13) — segue il primo ad un intervallo di tempo lungo se misurato dalla impazienza del pubblico matematico, ma non certo ingiustificato se si tiene presente la somma di lavoro che ne esigeva la compilazione. Se il I volume ebbe accoglienze assai liete in tutto l'universo matematico, altrettali ne riceverà indubbiamente il II, in cui l'egregio A., cedendo alle lusinghe dei seducenti temi trattati, si è spesso attardato più di quanto era da attendersi, vista l'abbondanza della materia e tenendo conto de' criterî adottati nel I; in conseguenza si è costituito un bel libro, di un buon terzo più esteso del suo fratello maggiore. Esso si chiude con un accurato indice per materie dell' intera opera, col quale resta soddisfatto un desiderio generale, che noi avevamo manifestato rendendo conto della prima parte di essa. E poichè il *Repertorio* sembra destinato a riapparire più volte dinnanzi al pubblico matematico, segnaliamo alcune lievissime mende da togliere in edizioni future: a pag. 64 oltre Descartes giustizia vuole si ricordi Fermat e a pag. 796 oltre a Eulero, Descartes; a pag. 195 non è di Staudt che si tratta ma di Staude e a pag. 695 non del *Giornale* di Crelle ma sibbene di quello di Liouville. Chiediamo poi un cenno dei « principî di corrispondenza » del Salmon e dello Zeuthen, finalmente un po' di posto per la « teoria delle configurazioni ». Vorremmo da ultimo un piccolo cambiamento nella nomenclatura; il bando cioè pei nomi « rullette » e « curve di sdrucciolamento », il primo dei quali costituisce un delitto di lesa lingua italiana, mentre il secondo è troppo lungo; quello potrebbe es-

Digitized by Google

sere surrogato con « trocoidi » e questo con quello di « olistoidi » (da ὀλισθάνω = scorrere) — perfettamente corrispondente al nome *glissettes* usato da francesi ed inglesi. G. L.

Luigi Bianchi. — *Teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche* (Pisa, Enrico Spoeri edit., 1898-99. Lezioni autografate con copertina stampata; due vol. di pag. 318 e 469, oltre i relativi indici; L. 8 e L. 12).

Il primo volume *(Funzioni monodrome di variabile complessa)* consta dei capitoli I-VII. S'occupa delle funzioni di variabile complessa secondo Cauchy-Riemann e specialmente secondo l'indirizzo di Weierstrass, e ne fa applicazione alla rappresentazione conforme. Tratta distesamente delle sostituzioni lineari e dà la rappresentazione geometrica dei gruppi modulari, ampliato e semplice, mediante la quale interpreta elegantemente l'equivalenza di due forme quadratiche. Stabilisce i concetti d'integrali curvilinei e di superficie, dà le formule di trasformazione di Gauss e di Green; dimostra il teorema d'esistenza di Dirichlet per area circolare: dà le celebri formule di Cauchy per le funzioni di variabile complessa e parla dei residui. S'occupa delle funzioni analitiche e particolarmente di quelle a sole singolarità polari sulla sfera complessa. Dimostra i teoremi di Weierstrass e di Picart sui punti singolari essenziali. Espone i metodi di Cauchy e di Mittag-Leffler per sviluppare in serie funzioni ad infinite singolarità, e dà l'espressione, per prodotto infinito, di trascendente intera a dati punti nulli. Si occupa infine delle funzioni di più variabili complesse e del loro prolungamento analitico; considera le funzioni implicite e particolarmente le algebriche, parla del gruppo di monodromia e delle sue sostituzioni elementari.

Il secondo volume *(Funzioni ellittiche)* consta dei capitoli VIII-XVIII. S'attiene specialmente ai metodi di Weierstrass; dà le serie ed i prodotti infiniti relativi alle σ, σ_1, σ_2, σ_3, ζ, p di Weierstrass; dà le principali proprietè di queste funzioni e le loro relazioni con le *sn, cn, dn* e con le ϑ di Jacobi, e dà gli sviluppi in serie ed in prodotti infiniti anche per queste funzioni: fa conoscere formule notevoli di Legendre, Jacobi, Abel, ecc. e dà qualche notizia storica. Dà le formule d'adizione, di moltiplicazione e divisione dell'argomento; parla dei gruppi delle equazioni relative alla divisione e della loro risolubilità, od irrisolubilità, degli irrazionali da aggiungersi per abbassare il gruppo algebrico a quello di monodromia, ecc. Fa qualche applicazione geometrica dell'esprimibilità delle coordinate del punto generatore di curva generale del 3.° ordine per funzioni ellittiche d'un parametro. Tratta della trasformazione delle funzioni ellittiche; considera la media arit-

Digitized by Google

metico-geometrica di Lagrange e Gauss e la sua relazione con la trasformazione di Landen. S' occupa delle funzioni modulari e dell'equazioni modulare nonchè del gruppo e delle risolventi di questa; costruisce la risolvente di 5.° grado di Hermite e la considera anche come risolvente dell'equazione generale algebrica del 5.° grado. Tratta delle p a moltiplicazione complessa, della relativa equazione per la divisione dei periodi e dell' equazione per gli invarianti; s' occupa del legame della teoria delle p a moltiplicazione complessa con quella delle forme binarie quadratiche; e termina con un cenno delle belle scoperte di Kronecker riguardanti la composizione del 1.° membro dell'equazione degli invarianti in fattori corrispondenti ai generi delle forme quadratiche. F. G.

H. Brocard. — *Notes de Bibliographie des Courbes géométriques. Partie complémentaires.* Bar-le-Duc. Imprimerie et lithographie Comte-Jaquet. Facdonal, directeur, 1899. 8.° picc.; p. 8 (non numerate) + 243 (autografato).

Con questo nuovo volume l'A. ha recato notevoli perfezionamenti ed aggiunte al dotto e coscienzioso lavoro (v. *Bollettino,* I, p. 55) che egli consacrò alla bibliografia delle curve piane; così egli potè far giungere a 1022 il già rispettabile numero di voci che comprendeva il suo elenco di curve. Benchè, per ragioni altra volta addotte, non crediamo opportuno addentrarci in un minuto esame critico dello scritto di cui si tratta, pure crediamo debito nostro mettere in guardia il lettore contro un equivoco in cui potrebbe cadere leggendo quanto l'egregio A. ha scritto a pag. 58-59.

È risaputo che si definisce per *trattrice* di una retta r una curva tale che il segmento di una sua tangente qualunque compreso fra il relativo punto di contatto e la retta r abbia un'assegnata lunghezza l. Generalizzando, dato che sia una curva Γ_1 se ne può considerare un'altra Γ tale che per ogni sua tangente il segmento intercetto fra il corrispondente punto di contatto M ed uno, M_1, de' punti in cui essa taglia Γ_1, abbia la lunghezza l: Γ dicesi allora *equitangenziale* di Γ_1. Una curva qualsivoglia Γ può considerarsi come l'equitangenziale di infinite altre, ma qualunque delle quali si ottiene portando sulle tangenti di Γ, a partire dai punti di contatto di una direzione determinata, tanti segmenti di data lunghezza. Onde fra le coordinate (x, y) e (x_1, y_1) di due punti corrispondenti M e M_1 sussistono le relazioni:

$$x_1 = x + l\frac{dx}{ds}, \quad y_1 = y + l\frac{dy}{ds},$$

Digitized by Google

(s essendo al solito l'arco di Γ), le quali mostrano che la ricerca di Γ_1 conoscendo Γ esige soltato differenziazioni, mentre la questione inversa esige l'integrazione di un sistema di equazioni differenziali. Se il segmento costante si porta in senso opposto, da M si ottiene un punto M_2 differente da M_1; il luogo dei punti M_2 è una curva Γ_2 in generale diversa da Γ; se per es. Γ fosse la trattrice relativa alla retta Γ_1, Γ_2 sarebbe una sintrattrice. Ciò prova che in generale per ottenere la curva Γ equitangenziale di Γ_1 non è il caso di considerare (come fa il Brocard) l'inviluppo delle corde di Γ_1 aventi la lunghezza costante di $2l$, giacchè per ciascuno il punto di contatto non ne è il punto medio: così se Γ_1 consta di due rette fra loro ortogonali, l'inviluppo è un asteroide regolare, mentre il luogo dei punti medî è una circonferenza. D'altronde, se in generale la determinazione di Γ rientrasse nelle ricerche d'un inviluppo, essa sarebbe un problema di calcolo differenziale, mentre vedemmo essere di pertinenza del calcolo integrale. Quindi la costruzione, a cui allude il Brocard, è applicabile soltanto quando la curva Γ_1 ammette delle curve Γ in due sensi equitangenziali. Una curva siffatta si avrebbe supponendo Γ_1 tale che ogni corda di data lunghezza determinasse coll'arco corrispondente un segmento di area costante; giacchè allora — in forza di un teorema del Magnus dimostrato geometricamente da Emanuele Fergola (1) — il punto di contatto di ogni corda dell'inviluppo è il punto medio. Di curve aventi siffatte prerogative, una se ne conosce: la circonferenza; ma, ne esistono altre? G. L.

J. Petersen. — *Vorlesungen über Functionstheorie.* Kopenhagen, Host, 1898. VII-328 p. 8.°

Il nome di Giulio Petersen è ben noto ai cultori della matematica pei concisi ma eccellenti trattati da lui pubblicati su varie parti di questa scienza. Il presente, che ne divide i pregi di chiarezza, esattezza ed eleganza di esposizione, se ne distingue per la maggior mole e per l'argomento più elevato. In esso l'autore, partendo dal concetto di Cauchy e Riemann di funzione d'una variabile complessa, studia anzitutto le funzioni algebriche e i loro integrali col sussidio delle superficie a più fogli. Passa poi alla teoria delle serie, quindi agli sviluppi di Cauchy e di Laurent, e di qui al concetto di funzione analitica secondo Weierstrass. Chiudono la prima parte (teoria generale) un breve studio delle funzioni trascendenti intere, e la dimostrazione dei teoremi d'esistenza di Riemann col processo alternante di Schwarz. — La

(1) *Ricerche relative alle curve inviluppi* (Memorie della Società It. delle Scienze, T. XXIV, 1850), Probl. V.

Digitized by Google

seconda parte è dedicata alle più importanti funzioni speciali: funzioni Γ e ζ, funzioni biperiodiche in generale, funzioni θ, funzioni ellittiche e modulari. Qualche appunto avremmo a fare sull'ordine dato alla materia della prima parte, di cui non ci apparisce ben chiaro il concetto informatore; ma l'a. dichiara nella prefazione di non aver voluto dare un'esposizione completa della teoria delle funzioni, ma solo una rivista dei punti più importanti di essa, e tale scopo può dirsi pienamente raggiunto. G. VIVANTI.

PROGRAMMI E RIASSUNTI
DI CORSI UNIVERSITARII

UNIVERSITÀ DI PISA - CORSO DI MECCANICA RAZIONALE
Anno 1899-1900 (1).

PRELIMINARI.

Gradi di libertà di un sistema di punti — Coordinate di un sistema invariabile: angoli euleriani.

Quantità e unità derivate: dimensioni di un'unità derivata.

Vettore — Vettore applicato — Momento di un vettore applicato rispetto ad un polo. Sistema di vettori applicati — Coppia — Equipollenza di due sistemi di vettori applicati — Riduzione di un sistema di vettori applicati.

Applicazione della teoria dei vettori ai principii della « Statica » dei sistemi invariabili — Dimostrazione di Poisson del « parallelogramma delle forze » — Condizioni d'equilibrio di un sistema invariabile di punti a cui sono applicati sforzi dati — Estensione ai sistemi di « punti pesanti ». Baricentro.

CINEMATICA.

Spostamento di un punto, e di un sistema — Analisi dello spostamento rigido: coordinate di Rodrigues — Analisi dello spostamento omografico (lo spostamento d'ogni punto funzione lineare delle coordinate del posto iniziale), e dello spostamento continuo regolare (lo spostamento d'ogni punto funzione regolare delle coordinate del posto iniziale).

(1) Lo stesso programma fu svolto nel decorso anno.

Digitized by Google

Movimento di un punto, e di un sistema — Forme principali di movimento — Movimento relativo.

Velocità di un punto — Atto di movimendo di un sistema — Relazione della velocità e dell'atto di movimento collo spostamento evanescente — Analisi dell'atto di movimento rigido: formole di Poisson — Analisi dell'atto di movimento omografico, e continuo regolare — Velocità nel movimento relativo: teorema del parallelogramma delle velocità.

Accelerazione di un punto — Movimento centrale: teoria generale, ed esame particolare dell'accelerazione proporzionale alla distanza dal centro (movimento armonico), e inversamente proporzionale al quadrato di questa distanza (movimento planetario) — Accelerazione nel movimento relativo: teorema di Coriolis — Accelerazioni di ordine superiore.

DINAMICA.

I.

Proprietà generali del movimento

Significato concreto della posizione (determinata mediante le stelle fisse), e del tempo (determinato mediante la rotazione della sfera celeste).

Postulati fondamentali della Dinamica, e relativa definizione del « Corpo naturale » — Massa: densità: centro di massa — Teorema della conservazione della massa (della continuità) — Forza motrice — Leggi della forza motrice (dell'eguaglianza dell'azione o della reazione: del parallelogramma delle forze) — Forza motrice nel movimento relativo: forze apparenti.

Nozioni storiche sui principii della Dinamica; riflessioni critiche sui varii metodi tenuti per stabilirli.

Illustrazione degli stessi principii mediante l'applicazione alla teoria delle gravità, fondata sulle leggi di Galileo della caduta dei gravi (1.ª approssimazione della teoria della gravità).

Teorema del movimento del centro di massa o della quantità di moto — Teorema della conservazione del movimento del centro di massa o della conservazione della quantità di moto — Forze esterne ed interne ad un corpo — Applicazioni.

Postulato della forza elementare — Forza acceleratrice totale, esterna ed interna, in un punto — Sistema di forze applicato ai punti di un corpo; sistema composto di più altri, relativi ad altrettante circostanze determinatrici.

Digitized by Google

Potenza di un sistema di forze (totale o parziale) applicato ai punti di un corpo, corrispondente ad un atto di movimento — Teorema della forza viva — Lavoro di un sistema di forze (totale o parziale) applicato ai punti di un corpo, corrispondente ad un movimento del corpo medesimo — Potenziale — Teorema della conservazione dell'energia — Applicazioni.

Forme della forza viva corrispondente ai principali atti di movimento — Momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse — Ellissoide d'inerzia, ed elementi principali d'inerzia relativi ad un punto.

2.° postulato della forza elementare (la direzione è quella della congiungente i due punti a cui la forza si riferisce) — Conseguenti proprietà dei sistemi di forze interne.

Equazioni cardinali del movimento — Equazione che riassume le equazioni cardinali: concetto della velocità e dell'atto di movimento virtuale.

Teorema delle aree, e della conservazione delle aree — Gli stessi teoremi nel movimento relativo ad una terna d'assi in movimento traslatorio, coll'origine nel centro di massa — Applicazioni.

Forza elementare centrale — Rapporti tra l'ipotesi della forza elementare centrale e il teorema della conservazione dell'energia.

Equilibrio — Equazioni cardinali dell'equilibrio ed equazione che le riassume Condizioni d'equilibrio — Posizione d'equilibrio stabile: teorema di Dirichlet.

Applicazione dei precedenti risultati al movimento e all'equilibrio relativo.

Illustrazione degli stessi risultati mediante la loro applicazione alla teoria della gravitazione universale — Leggi di Kepler; deduzione della legge elementare neutoniana, o di gravitazione universale; fatti cosmografici comprovanti questa legge — Forza acceleratrice di gravitazione universale; funzione potenziale; equazione di Laplace — Teorema di Newton sull'attrazione di una crosta sferica a strati omogenei.

Applicazione di questo teorema e dei principii del movimento relativo al calcolo della forza motrice di un corpo, mobile in un campo ristretto, in prossimità del globo terrestre — Ulteriore approssimazione della teoria del movimento dei gravi; deviazione del filo a piombo verso mezzogiorno, e dei gravi cadenti verso oriente.

II.

Calcolo del movimento.

Concetto dei vincoli preventivamente imposti — Equazioni del movimento e dell'equilibrio di un sistema di corpi rigidi liberi — Equazioni di Euler — Integrali corrispondenti ai teoremi generali della

Digitized by Google

Dinamica — Condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio — Equazione di d'Alembert e Lagrange, equazione e teorema delle velocità virtuali, e teorema di d'Alembert, pel sistema di corpi rigidi liberi — Nozioni su questi due teoremi e riflessioni critiche.

Movimento di un corpo rigido per inerzia e per gravità — Movimento per mutua gravitazione neutoniana di un sistema di croste sferiche rigide, a strati omogenei, esterne l'une all'altre; problema dei due corpi; nozioni sul problema degli n corpi.

Forza acceleratrice limite in un punto, corrispondente ad una determinata forza elementare, atta al calcolo di una forza acceleratrice esterna — Proprietà della forza acceleratrice limite interna (determinata dallo stesso corpo a cui appartiene il relativo punto) — Esistenza di questo vettore nel caso della forza elementare neutoniana, e accertamento di quelle proprietà (principii della teoria della funzione potenziale nel campo dell'agente).

Postulato della pressione — Pressione specifica in un punto relativa ad un raggio; sistema di pressioni applicato ai punti di una superficie, da una parte — Proprietà della pressione.

Forma più generale dell'equazione di d'Alembert e Lagrange — La stessa equazione nel movimento relativo.

Sistema di corpi rigidi vincolati — Equazioni traducenti i vincoli — Sistema olonomo e anolonomo — Vincoli dipendenti e indipendenti dal tempo — Esame di cinque esempii principali: 1.°) Corpo rigido un cui punto ha movimento prestabilito; 2.°) Corpo rigido rotolante sopra un piano in movimento prestabilito; 3.°) Corpo rigido rotolante senza strisciare sopra un piano in movimento prestabilito; 4.°) Corpo rigido un cui punto appartiene ad una superficie in movimento prestabilito; 5.°) Corpo rigido una cui retta ha movimento prestabilito.

Definizione dell'atto di movimento virtuale.

Definizione delle pressioni vincolari mediante la loro « proprietà caratteristica » (la potenza corrispondente ad ogni atto di movimento virtuale è nulla) — Pressioni preventivamente date; forze impresse.

Forma dell'equazione di d'Alembert e Lagrange per il considerato sistema generale di corpi rigidi vincolati.

Definizione delle equazioni pure del movimento di un sistema di corpi rigidi vincolati (combinazioni lineari delle equazioni cardinali relative a tutti i corpi, levatine i termini corrispondenti alle pressioni vincolari) — Formazione delle equazioni pure medesime — Sistema delle equazioni pure nei cinque esempii — 1.ª forma delle equazioni del movimento di Lagrange: calcolo dei moltiplicatori, e relativa determinazione del risultante e del momento delle pressioni vincolari in funzione del tempo, della posizione, e dell'atto di movimento — 2.ª forma delle equazioni del movimento di Lagrange, pei sistemi olonomi.

Digitized by Google

Nozioni sulla resistenza dei mezzi e sull'attrito — Leggi delle pressioni (preventivamente date) di resistenza dell'aria al movimento di un proiettile, e d'attrito per mutuo contatto delle superficie di due corpi.

Equilibrio di un sistema di corpi rigidi comunque vincolati — Equazioni pure, e loro formazione — Posizioni d'equilibrio — Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio — Applicazione ai cinque esempii.

Teoria d'alcuni movimenti particolari — Proiettile sferico nell'aria — Palla da bigliardo — Pendolo semplice — Pendolo composto. — Solido grave, di rotazione, omogeneo, sospeso per un punto dell'asse di figura.

Movimento impulsivo; teorema di Carnot — Urto di due corpi rigidi.

Principio generale per la formazione delle equazioni del movimento e dell'equilibrio dei corpi comunque variabili.

Formazione delle equazioni del movimento dei corpi elastici isotropi.

Formazione delle equazioni del movimento dei fluidi perfetti — Principii dell'idrostatica: superficie isobariche; circostanze relative al contorno, e determinazione della parte libera di esso; applicazione ai fluidi gravi — Equazione del movimento di Euler e di Lagrange — Movimento con funzione delle velocità — Principii della teoria del moto vorticoso.

GIAN ANTONIO MAGGI.

NOTIZIE

TEMA PROPOSTO DALLA SOCIETÀ JABLONOWSKI PER L'ANNO 1902. — Che il metodo della media aritmetica applicata da C. Neumann a partire dal 1870 possegga un alto grado di generalità, è dimostrato tanto dai molti lavori del Neumann stesso (Abh. der K. S. Ges. des Wiss. XIII, S. 707) quanto delle profonde considerazioni del Poincaré (Acta math. XX, p. 55). Ma dalla totalità di siffatte ricerche emerge che parecchi punti difficili esigono ulteriori schiarimenti. Sembra perciò importante, di intraprendere almeno il lavoro preparatorio, per conseguire un'idea completamente chiara dei fondamenti propri a questo campo, sfruttando specialmente in tutta la sua estensione la succitata memoria del Poincaré, e cercando possibilmente di estenderne i risultati. Anzitutto però sorge il problema di dare all'esposizione del Poincaré una maggiore semplicità e chiarezza e, dov'è necessario, anche un maggiore grado di rigore.

Digitized by Google

Senza pretendere di preferire piuttosto l'una che l'altra di tali direzioni, la Società esprime il desiderio:

che le investigazioni contenute nella memoria del Poincaré « Le méthode de Neumann et le problème de Dirichlet » 1896, siano in qualche modo sostanzialmente perfezionate.

Premio 1000 Marchi.

I lavori dei concorrenti devono essere scritti in tedesco, in latino od in francese e presentati anonimi al Segretario della Società non più tardi del 30 Novembre 1902. Il giudizio sarà pronunciato nel Marzo o nell'Aprile seguente. I lavori premiati resteranno di proprietà della Società.

* * *

PEI COLLETTORI DI MODELLI DI MATEMATICA. — La Casa L. Brill di Darmstadt, che ebbe sinora la prerogativa di fornire alle scuole di tutto il mondo degli ottimi modelli di matematica, ha cessato a partire dall'Agosto di quest'anno di confezionarne ed ha ceduto il materiale raccolto alla Casa Martino Schilling di Halle a. S., la quale si propone, non solo della riproduzione degli antichi tipi, ma anche la costruzione di nuovi: si è a tale scopo assicurata il concorso scientifico del Prof. Dr. F. Schilling, dell'Università di Gottinga.

« In avvenire come in passato (sta scritto nella circolare di annuncio) rivolgeremo le nostre cure principali alla preparazione di modelli di matematica pura, in particolare a quelli relativi alla teoria delle curve e superficie e alla teoria delle funzioni, entrambe intese nel loro significato più ampio; ma poi rivolgeremo la nostra attenzione alla matematica applicata, in particolare alla tecnica, in parte per la ragione che, corrispondentemente ai nuovi programmi d'esame per gli uffici scolastici superiori, emanati dal governo prussiano, essa verrà in avvenire maggiormente curata anche nelle Università. Alludiamo specialmente alla geometria descrittiva, alla meccanica tecnica e teorica, inclusa la cinematica e la teoria della elasticità, ai varî rami della fisica matematica, all'elettrotecnica e in genere della costruzione delle macchine, in quanto ivi appare qualche concetto matematico. Noi saremo grati per qualsia consiglio ci verrà da parte dei competenti in materia, e terremo conto dei desiderî che ci verranno espressi di modelli determinati; anzi, pel buon esito dell'impresa preghiamo caldamente ci vengano comunicati ».

* * *

I PRINCIPÎ FONDAMENTALI DELL'ALGEBRA, considerati dal punto di vista proprio ai matematici filosofi del secolo attuale, diedero materia al discorso tenuto addì 21 Agosto 1899 dal Prof. A. Macfarlane nella

Digitized by Google

sua qualità di Presidente della Sezione *A* dell'*American Association for the Advancement of Science*. L'egregio autore (di cui sono ben noti gli studi sulla teoria dei quaternioni) esamina e paragona i modi in cui vennero successivamente concepite le leggi su cui si erige l'algebra dal Peacock, dal Gregory, dal de Morgan, dal Boole, dall'Hamilton, dal Kelland, dal Grassmann, dall'Hankel, dal Clifford e finalmente dal Whitehead. E chiude la sua dotta rassegna con la seguente profezia: « Descartes sposò l'algebra alla geometria; il formalismo tende a divorziarli. Il progresso delle matematiche in questo secolo fu diretto dal formalismo verso il realismo; nel secolo venturo, si può predire, il simbolismo cederà sempre più il posto alla notazione, le convenzioni ai principi e le vuote estensioni alle generalizzazioni rigorose ».

* * *

THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY pubblicherà, a partire dal prossimo anno, coll'appoggio delle principali Università degli Stati Uniti, oltre il *Bulletin*, già favorevolmente conosciuto, una collezione di *Transactions* destinata alla pubblicazione delle estese memorie originali che non potranno trovar posto nell'*American Journal of Mathematics*.

* * *

RECENTI PUBBLICAZIONI MATEMATICHE RUSSE. — Il Prof. Vassilief, dell'Università di Kasan gentilmente ci comunica il seguente elenco di opere matematiche di recente pubblicate in Russia:

A.P. KOTELNIKOF. *Teoria proiettiva dei vettori*. Kasan (p. XL + 317).

D. EGOROFF. *Le equazioni a derivate parziali del secondo ordine a due variabili indipendenti*. Mosca (p. XIX + 389).

V. ZIMMERMANN. *La regola di Eulero applicata ad una classe di problemi di massimo e minimo relativi*. Odessa (p. 203).

P. GRAVÉ. *Costruzione delle curve del terzo ordine*. Dissertazione di laurea. Kasan, 1898.

D. SINTJOF. *Gli integrali razionali delle equazioni differenziali lineari*. Disertazione di laurea. Kasan, 1898.

Inoltre è uscito il I vol. (p. VI + 714) delle *Opere* di P. L. Tchebychef per cura di A. Markoff e N. Sonin.

* * *

I CLASSICI DELLE SCIENZE ESATTE. — L'ottima collezione intitolata « Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften » (Leipzig, W. Engelmann) si è di recente arrichita dell'*Ars conjectandi* — la celebre

Digitized by Google

opera postuma di Giacomo Bernoulli — tradotta in tedesco e corredata di pregevole note da R. Haussner. L'importanza e la rarità di questo scritto sono tali che scelta migliore non poteva venir fatta dal Professore Wangerin, che degnamente pressiede alla formazione di una raccolta, ove gia figurano i più bei nomi di matematici, le più decisive e svariate ricerche. Rammentiamo infatti che Eulero vi figura con le sue memorie intorno alla trigonometria sferica (n. 73) ed alle carte geografiche (n. 93) e Lagrange per le sue aggiunte all'algebra di Eulero (n. 103); Gauss con la sua memoria sulle superficie curve (n. 5) e con le sue quattro dimostrazioni del teorema fondamentale dell'algebra (n. 11); Abel con la sua memoria intorno alla serie bimiale (n. 71) e Jacobi con le sue investigazioni intorno alle funzioni quadruplicemente periodiche (n. 64) ed ai determinanti (nn. 77 e 78); Steiner con le due opere da lui pubblicate a parte (n. 60, 82-83) e Dirichlet con le sue indagini concernenti l'applicazione dell'analisi infinitesimale alla teoria dei numeri (n. 91). Nè vennero escluse le investigazioni del Bravais su i poliedri simmetrici (n. 17) ed i sistemi regolari di punti (n. 90), e neppure quelle di varî celebri autori sull'attrazione degli elissoidi (n. 15) e sul calcolo delle variazioni (n. 46-47): citiamo da ultimo le memorie premiate di Rosenhain (n. 65) e Göpel (n. 67) concernenti le funzioni abeliane.

* * *

Un nuovo papiro matematico. — Nel T. XIX (1898, p. 25-29) di *The American Journal of Philology*, E. Johnson Goodspeed ha pubblicata la trascrizione commentata di un breve documento (35 linee intere e circa 17 incomplete) di qualche importanza, concernente la geometria calcolatrice greco-egiziana. È un breve frammento di un papiro greco scritto in unciale, scoperto da Ed. E. Ayer (1) al Cairo e da lui regalato al « Field Columbia Museum » di Chicago. Sembra una copia, eseguita nel II Sec. dell'E. v., di uno scritto anteriore alla nascita di G. C. I problemi ivi trattati concernono tutti il calcolo delle aree di figure trapezoidali o rombiche; ed è notevole che i dati sono scelti in modo che tutte le radici quadratiche da estrarsi siano espresse da numeri interi. L'indole generale del documento lo fa avvicinare agli scritti superstiti di Erone.

* * *

Ai cultori della geometria degli iperspazî. — Il R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti ha proposto come tema al Premio

(1) Donde il nome di *Papiro Ayer* che esso pare destinato a portare.

Digitized by Google

Querini (L. 3000), il seguente: « I caratteri projettivi delle superficie algebriche a due dimensioni dello spazio a n dimensioni ». Chiusura del concorso: 31 Dicembre 1902.

* * *

Ricerche di G. Bolyai sui numeri immaginarî. — Nell'anno 1834 la Società Jablonowski di Lipzia, seguendo il parere del Drobisch, proponeva come tema di concorso la rappresentazione geometrica dei numeri immaginarî. Tre lavori vennero presentati in tempo utile (cioè prima del dicembre 1837), tutti tre di autori ungheresi, cioè: Wolfango Bolyai, Giovanni Bolyai e Francesco Kerekes. Il giudizio venne pubblicamente pronunziato nel Marzo del seguente anno; nessuna delle memorie presentate venne ritenuta degna del premio promesso; soltanto alla terza ne venne accordato la metà, quasi a titolo d'incoraggiamento. Questo ultimo scritto non venne mai pubblicato; riguardo a quello di W. Bolyai (contrassegnato col motto *Sigillum veri simplex*) si può divinarne il contenuto raccogliendo quanto alle grandezze complesse si riferisce nel *Tentamen* e nel *Kurzes Grundriss;* finalmente del lavoro di Bolyai figlio (recante come epigrafe *Fructus non nisi maturi decerpendi*), P. Stäckel ha trovato l'originale fra la collezione degli scritti del celebre geometra conservata nel Collegio di Maros-Vásárhely, accompagnato da molti sviluppi relativi. Il tutto egli ha di recente pubblicato in un'interessante nota, intitolata: Johan Bolyai's *Theorie der imaginären Grössen* ed inserita nel T. XVI (1899) dei « Math. und Naturw. Berichten aus Ungarn », nota della quale dovranno tener conto sia i futuri biografi del Bolyai, sia chi in avvenire esporrà i tentativi fatti per rappresentare geometricamente i numeri complessi.

* * *

Giubileo di M. Cantor. — Il 23 Agosto di quest'anno Maurizio Cantor compì il settantesimo anno di vita. A commemorare il lieto evento nel modo più significante e degno, due amici fidati, due compagni di lavoro del sommo storico progettarono la pubblicazione di una raccolta di memorie scritte da cultori della storia della matematica: tale disegno riscosse in tutto il mondo degli studiosi l'applauso più concorde, l'adesione più completa; lo prova il volume che testè uscito (1), in cui il piano dei sig.ri Curtze e Günther è attuato, e di cui indichiamo qui sotto forma schematica il contenuto:

(1) *Festschrift zu Moritz Cantors 70. Geburtstage.* Zugleich 9. Heft der *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* und Supplement zum 44. Jahrgange der *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. Im Auftrage herausgegeben von M. Curtze in Thorn und S. Günther in München. Mit Moritz Cantors Porträt in Heliogravüre, zwei Tafeln und 55 Figuren im Text. Leipzig, Teubner; p. VIII, 657 8.° gr. (Prezzo del vol. legato Mk. 20).

Digitized by Google

V. V. Bobynin, développement des procédés servants à décomposer le quotien en quantième. — *A. v. Braunmühl*, zur Geschichte der prosthaphaeretischen Methode in der Trigonometrie. — *F. Cajori*, Notes on the History of Logarithms. — *M. Curtze*, der Tractatus Quadrantis des Robertus Anglicus in deutscher Übersetzung aus dem Jahre 1477. — *S. Dickstein*, zur Geschichte der Prinzipien der Infinitesimalrechnung. Die Kritiker der " Théorie des fonctions analytiques „ von Lagrange. — *G. Enestrom*, P. W. Wargentin und die sogenannte Halley'sche Methode. Ein Beitrag zur Geschichte der mathematischen Statistik. — *A. Favaro*, intorno ad un inedito e sconosciuto Trattato di Mechaniche di Galileo Galilei nell'Archivio di S. A. il Principe di Thurn-Taxis in Ratisbona. — *E. Gelcich*, zur Geschichte der Längenbestimmung zur See. — *J. H. Graf*, die Geometrie von Le Clerc und Ozonam, ein interessantes mathematisches Plagiat aus dem Ende des XVII. Jahrhunderts. — *S. Günther*, Nikolaus von Cusa und seine Beziehungen zur mathematischen und physikalischen Geographie. — *T. S. Heath*, on an allusion in Aristotle to a construction for parallels. — *J. L. Heiberg*, byzantinische Analekten. — *A. Heller*, über die Aufgaben einer Geschichte der Physik. — *Fr. Hultsch*, Winkelmessungen durch die Hipparchische Dioptra. — *K. Hunrath*, des Rheticus Canon doctrinae triangulorum und Vieta's Canon mathematicus. — *G. Loria*, il « Giornale de' Letterati d'Italia » di Venezia e la « Raccolta Calogerà » come fonti per la storia delle matematiche nel secolo XVIII. — *P. Mansion*, notes sur le caractère géométrique de l'ancienne astronomie. — *W. F. Meyer*, über die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. — *F. Müller*, zur Terminologie der ältesten mathematischen Schriften in deutscher Sprache. — *A. Nagl*, die Rechenmethoden auf dem griechischen Abakus. — *F. Rosenberger*, die Geschichte der exakten Wissenschaften und der Nutzen ihres Studiums. — *F. Rudio*, die Unverzagt'schen Linienkoordinaten. Ein Beitrag zur Geschichte der analytischen Geometrie. — *P. Stäckel*, Franz Adolph Taurinus. Ein Beitrag zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. — *H. Staigmüller*, Johann Scheubel, ein deutscher Algebraiker des XVI. Jahrhunderts. — *M. Steinschneider*, Mathematik bei den Juden (1701—1550). — *A. Sturm*, Bemerkungen zur Geschichte der altgriechischen Mathematik. — *H. Suter*, der Loculus Archimedius oder das Syntemachion des Archimedes. Zum ersten Male nach zwei Manuscripten der Kgl. Bibliothek zu Berlin herausgegeben uud übersetzt. — *P. Tannery*, les « Excerpta ex M.SS. R. Des-Cartes ». — *A. Unger*, einige Additionsmaschinen. — *E. Wappler*, zur Geschichte der deutschen Algebra. — *G. Wertheim*, Pierre Fermat's Streit mit John Wallis. Ein Beitrag zur Geschichte der Zahlentheorie. — *E. Wohlwill*, die Entdeckung der Parabelform der Wurflinie. — *M. Curtze*, Verzeichnis der mathematischen Schriften des Hofrat Professor Dr. Moritz Cantor (1851—1899).

Marco Bertolone, Direttore-Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1899.

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abbati 26.
Abel 69, 132, 142.
Aitoff 129.
d'Alembert 138.
Alexandroff 129.
Amodeo 84.
Andrade 58.
Apollonio 13, 14, 31.
Appell 80.
Apreda 104.
Araldi 25.
Archimede 13, 14, 18, 27, 144.
Aristotele 144.
Aschieri 84.
Andoyer 58.
Augusto (Principe) 96.
Autonne 58.
Ayer 142.

Bäcklund 34.
Ball R. S.: Vedi Stawel Ball.
Ball (Rouse) 21, 22.
Baltzer 3.
Banal 34.
Bang 34.
Barbieri G. B. 24.
Bartels 116, 117.
Barth 22.
Bassot 68.
Battaglini 4, 7, 84, 98.
Beck 4.
Becker 4.
Beman 124, 5.
Beez 34.
Beldomando 28.
Bellacchi 130.
Bellaso 27.
Beltrami 12, 34, 38, 105, 106.
Bergolli 27.
Bernoulli (famiglia) 56.
Bernoulli Giacomo 142.
Bertini 76, 77, 78, 110.
Bertrand 61.
Bessel 6, 95.
Bettazzi 4.
Betti 12.
Bianchi 35, 39, 40, 132, 3.
Bismark 95.
Bobiynin 144.
Bodemann 113, 115.
Böklen 112.
Bohlmann 123.
Bolyai 1, 3, 4, 5, 6, 10, 105, 110, 117, 143.
Bombelli 28.
Boncompagni 24, 26.
Boni 28.
Bonnel 4.
Bouniakovsky 4.
Bonola 1, 33, 81.
Boole 105, 141.
Bordin 79.
Borel 58. 78.
Bougaïef 57, 80.
Braunmühl 144.
Bravais 142.
Brianchon 31.
Brill 35.
Brill L. 80, 140.
Brioschi 23. 58.
Brocard 133-4.
Broden 4.
Brunn 58.
Bubnow 110.
Burali-Forti 58.
Burkhardt 33, 35, 65.
Busche 82, 84.

Cajori 112, 144.
Calinon 35.
Cantor G. 19, 33, 35, 36, 99.
Cantor M. 55, 57, 80, 103, 104, 143, 144.
Capelli 67.
Caporali 110.
Capuano 25.
Carnot 82, 128, 138.
Casorati 12.
Cassani 5.
Castelnuovo 32, 77.
Cauchy 100, 105, 128, 132, 134.
Cauer 95.
Cavani 26.
Cayley 1, 19, 36, 82, 83, 84.
Cesàro 36, 98, 100.
Ceva 30.
Chasles 26, 121, 127, 128.
Chandler 78.
Christoffel 34, 36.
Clairaut 56.
Clifford 17, 18, 21, 34, 37, 38, 85, 108, 141.
Codazzi 36.
Collignon 5.
Comberousse 9, 83.
Copernico 128-9
Coriolis 136.
Crelle 96, 97, 98, 131.
Cremona 80. 29, 85.
Curtze 5, 9, 128, 143.
Cusa 144.
Czuber 80, 102.

Damoiseau 78, 79.
Dantscher 124.
Darboux 36, 85, 111.
Desargues 31.
Descartes 57, 131, 125, 141, 144.
Dini 12.
Dixon 5.

Digitized by Google

Diofanto 14.
Dirichlet 51, 52, 53, 97, 132, 137, 142.
Dobriner 36.
Dogson 5.
Dressler 36.
Drobisch 143.
Duchemin 5.
Dickstein 144.
Duporcq 121-2.

Egoroff 141.
Enestrom 27, 57, 114, 144.
Engel 2, 7, 70, 75, 116, 118.
Engelmann 141.
Enneper 36.
Enriques 19, 33, 36, 57, 78, 85.
Erdmann 115.
Erone 142.
Escherich 36.
Euclide 2, 6, 8, 10, 15, 18, 27, 83.
Eudosso 122.
Eulero 56, 91, 115, 125. 131, 137, 139, 142.

Fano, 21, 40, 58, 85, 105, 105.
Faraday 11.
Faure 83, 85.
Favaro 28, 144.
Feddersen 22.
F. G. 133.
Fehr 80.
Fergola Em. 134.
Fermat 57, 114, 131, 144.
Ferraris (Galileo) 23.
Fibbi 36.
Fiedler 85, 88.
Fitz-Patrick 21.
Flauti 23.
Fleury 5.
Flye St. Marie 5, 16.
Foncenex (Daviet de) 6.
Fontené 85.
Foschini 130, 131.
Fourier 61.
Frahm 86.
Francoeur 78.
Frankland 36.
Frati 79.
Fricke 40, 55, 86.
Frischauf 5-6.

Galdeano 57, 80.
Galilei 27, 56, 115, 128, 136, 144.
Galois 69, 70.
Gauss C. F. 1, 3, 4, 6, 7, 36, 38, 51, 97, 105, 112, 116, 117, 118, 132, 133, 142.
Gauss Eugenio 112.
» Giuseppe 112.
» Guglielmo 112.
» Luigi 112.
» Minna 112.
» Teresa 112.
Gazzaniga 10.
Geiser 94.
Gelcich 144.
Geldenmaier 94.
Generali 28.
Genocchi 4, 6, 123.
Genty 111.
Gerard 6.
Gerbaldi 58.
Gerberto 110.
Gerhardt 110, 114, 115.
Giorgini 79.
G. L. (*vedi* Loria).
Goedseels 82.
Göpel 142.
Goodspeed 142.
Grassmann 1, 16, 33, 141.
Graf 93, 94, 144.
Gravé 141.
Green 60, 62, 65, 132.
Greenhill 80.
Gregory 141.
Günther 6, 144.
Guichard 36.

Hadamard 58, 78, 99, 130.
Halley 144.
Halsted 2, 4, 7, 117.
Hamilton 64, 141.
Hankel 141.
Harnack 123, 124.
Hart 80.
Hathaway 111.
Haussner 142.
Hazzidakis 36.
Heath 13, 14, 144.
Hegel 95.
Helmholtz 1, 7, 21, 39, 40, 64, 70, 106.
Heiberg 144.
Heller 144.
Hermite 10, 11, 51, 52, 53, 100, 133.
Hesse 31, 32.
Heusch 118, 119.
Hilbert 6, 82, 83, 86.
Hill 78.
Hoüel 4, 6, 7, 38, 40.
Housel 14.
Houxeau 28.
Hugo 6.
Hultsch 144.
Hunrath 144.
Hurwitz 57, 130.
Huygens 115.

Jablonowski 139, 143.
Jacobi 98, 132, 142.
Janischefsky 116.
Joly 111.
Joukowski 58.
de Juvenii 27.

Kagan 36.
Kahan 7, 37.
Kantor (S.) 77.
Kelland 141.
Kempe 80.
Kepler 137.
Kerekes 143.
Killing 2, 7, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 34, 37, 40, 86.
Kimura 111.
Klein 1, 10, 11, 12, 15, 17, 18, 19, 34, 37, 40, 55, 57, 70, 80, 83, 86, 87, 111, 117.
Klöden 95, 96.
Koenigs 86.
König J. 110.
Kotelnikof 111, 141.
Kraft 111.
Kronecker 37, 77, 91, 108, 125, 133.
Kummer 97.

Digitized by Google

Lacroix 29.
Lagrange 29, 56, 69, 82, 83, 86, 114, 133, 138, 139, 142, 144.
Laguerre 83, 127.
Laisant 80.
Lalande 78.
Lambert 118.
Lancaster 28.
Landen 133.
Lange 93, 94, 96.
Laplace 29, 61, 102, 137.
Laugel 10.
Laurent F. 134.
Leibniz 110, 113, 115.
Le Clerc 144.
Legendre 132.
Libri 56.
Lie 21, 37, 39, 40, 58, 68, 75, 104, 128.
Liguine 80.
Lindemann 86.
Liouville 100, 105, 131.
Lipschitz 34, 38.
Lobatschewsky 1, 3, 4, 7, 8, 15, 16, 18, 83, 84, 105, 116, 118.
Loria 14, 22, 23, 29, 38, 57, 58, 59, 67, 68, 79, 91, 92, 101, 102, 104, 105, 118, 122, 123, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 134, 144.
Lüroth 38, 76, 83, 87.
Luppi 79.

Macfarlane 111, 140.
Maclaurin 56, 92.
Mc. Aulay 111.
Maggi 139.
Magnizky 117.
Magnus 134.
Mannheim 128.
Manfredi G. 55.
Mansion 8, 59, 80, 83, 144.
Manzoni 27.
Marescotti 26.
Martin 23.
Mascheroni 27.
Mastai 27.
Menelao 30.
Méray 88, 91.
Mercati 79.
Meyer J. 58, 65, 66, 123, 144.
Mittag-Leffler 80, 132.
Minkowski 82, 83.
Molk 100, 101.
Monge 69, 75, 128.
Monro 38.
Montanari 28.
Montucla 55.
de Morgan 141.
Müller F. 144.
Muth 6, 125.

Nagl 144.
Navier 79.
Nedélec 106.
Nernst 101.
Netto 33, 38, 65.
Neumann C. 59, 65, 139, 140.
Newcomb 8.
Newton 59, 60, 137.
Nöther 78.
Novati 79.

d'Ocagne 7, 126.
Oettingen 22, 23.
Oltmann 97.
Oltramare 80, 105.
Ostwald 141-2.
d'Ovidio 87.
Ozonam 144.

Padelletti 23.
Padova 85.
Palatini 8.
Pantanelli 23.
Paoli 29.
de Paolis 5, 85.
Pappo 14.
Pascal B. 31.
» E. 2, 13, 123, 131.
Pasch 83, 87, 123.
Patraglione 79.
Peacock 141.
Peaucellier 80.
Peano 4, 8, 38, 58, 99, 111, 123.
Perseo 122.
Pervouchine 58.
Pessuti 91.
Petersen 8, 80, 120, 234.
Pestalozzi 98.
del Pezzo 77.
Philippon 8.
Picard 35, 52, 53, 54, 57, 70, 77, 80.
Pieri 87.
Pietzker 6, 8.
Pincherle 58.
Pitagora 3, 9, 39.
Piuma 93.
Pizzetti 65.
Plamann 95.
Plücker 16, 69, 76, 97.
Poggendorff 22.
Poincaré 34, 39, 40, 57, 70, 80.
Poisson 61, 102.
Poncelet 78, 121, 122.
della Porta 27.
Poudra 28.
Pringsheim 65, 130.
Proclo 3.

Razzaboni 23.
Reijes 9.
Reina 38.
Reishaus 9.
Rethy 9, 110.
Retico 144.
Reye 58, 88, 121, 122.
Reyes y Prósper 88.
Rhind 110.
Ribaucour 23, 14.
Riccardi 2, 3, 5, 6, 23, 24.
Riccati 91, 92.
Riemann 1, 8, 10, 11, 12, 18, 21, 33, 34, 38, 39, 65, 70, 77, 81, 83, 105, 106, 128, 132, 134.
Roch 77.
Rodrigues 99, 135.
Rosenbergen 144.
Rosenheim 142.
Rossi 27.
Rouché 9, 83.
Rubini 23.
Rudio 57, 144.
Ruffini 28, 29.

Saccardo 79.
Saccheri 15, 55, 116.
Sacrobosco 23.

Digitized by Google

Saladini 91.
Saleta 9.
Salmon 88, 131.
Salvo-Cozzo 79.
Sannia 23.
San Roberto 23.
Sant' Onofrio 25.
Sayno 85.
Sbrana 9.
Scacchi 23.
Scheeffer 124.
Scheffers 75.
Schepp 123.
Schering 38, 83.
Scheubel 144.
Schiaparelli 122.
Schilling F. 140, 80.
Schilling M. 140.
Schläfli 34, 35, 38, 94, 97.
Schlegel 111.
Schmidt F. 4.
Schmidt H. 9.
Schmitz-Dumont 9.
Schönflies 10, 65.
Schoute 80.
Schroedel 80.
Schröder 58.
Schuler 9.
Schumacher 6, 7.
Schur 34, 38, 88.
Schwarz 134.
Schweikart 117, 118.
Segner 115.
Segre 68, 78, 88, 107, 109, 126.
Semikolonow 9.
Serret A. 124.
Servant 78.
Sforza G. 79.
Sibiriakoff 9.
Sikstel 9.
Simon 80.
Simon M. 101, 102.
Simon P. 9.
Simson 56.
Sintjof 141.
del Sole 26.
Solerti 79.
Spitz 10.
Stäkel 2, 4, 6, 116, 143, 144.
Stahl H. 88.
Staigmüller 144.
Staude 131.
Staudt 30, 83, 88, 128, 131.
Stawell Ball 10, 84, 111.
Steiner 80, 93, 98, 109, 142.
Steinschneider 144.
Stephanos 80.
Stewart 56.
Stickelberger 58.
Stodola 57.
Stoly 124.
Story 10, 88.
Storchi 28.
Study 65, 88.
Sturm A. 144.
Suini 10.
Suter 144.
Suworoff 39.
Sylvester 80, 125.

Tannery J. 100, 101.
» P. 122, 144.
Taurinus 117, 144.
Taylor 92.
Tchébychef 141,
Teixeira 80.
Thurn-Taxis (Princ. di) 144.
Tilly (de) 20, 82, 83.
Tiraboschi 24
Tirelli 88.
Torri 79.
Trendelberg 115.
Trudi 23.

Uberweg 20, 39, 40.
Unverzagt 144.
Unger 144

Vachtchenko-Zakhartchenko 3, 10.
Vahlen 91.
Vailati 12, 122.
Vallée Poussin (de la) 58.
Varisco 10.
Vaschy 78.
Vassilieff 80, 116, 141.
Veronese 10, 19, 20, 109.
Vessiot 70.
Vicini 28.
Vico 117.
Vieta 144.
Vinci 115.
Viteschi 121.
Vivanti 10, 56, 91, 93, 100, 103, 104, 119, 127, 129, 130, 135,
Volta 25.
Voss 37.

Wallis 144.
Wallis-Budge 10.
Walter 119, 120.
Wangerin 142.
Wappler 144.
Wargentin 144.
Weber H. 58.
Weierstrass 12, 100, 107, 125, 128, 129, 132, 134.
Weingarten 35, 38.
Wertheim 144.
Whithead 141.
Wiener 10, 88.
Wilson 114.
Witre 10.
Wohlwill 144.
Wölffing 111.
Wundt 20.

Young 10.

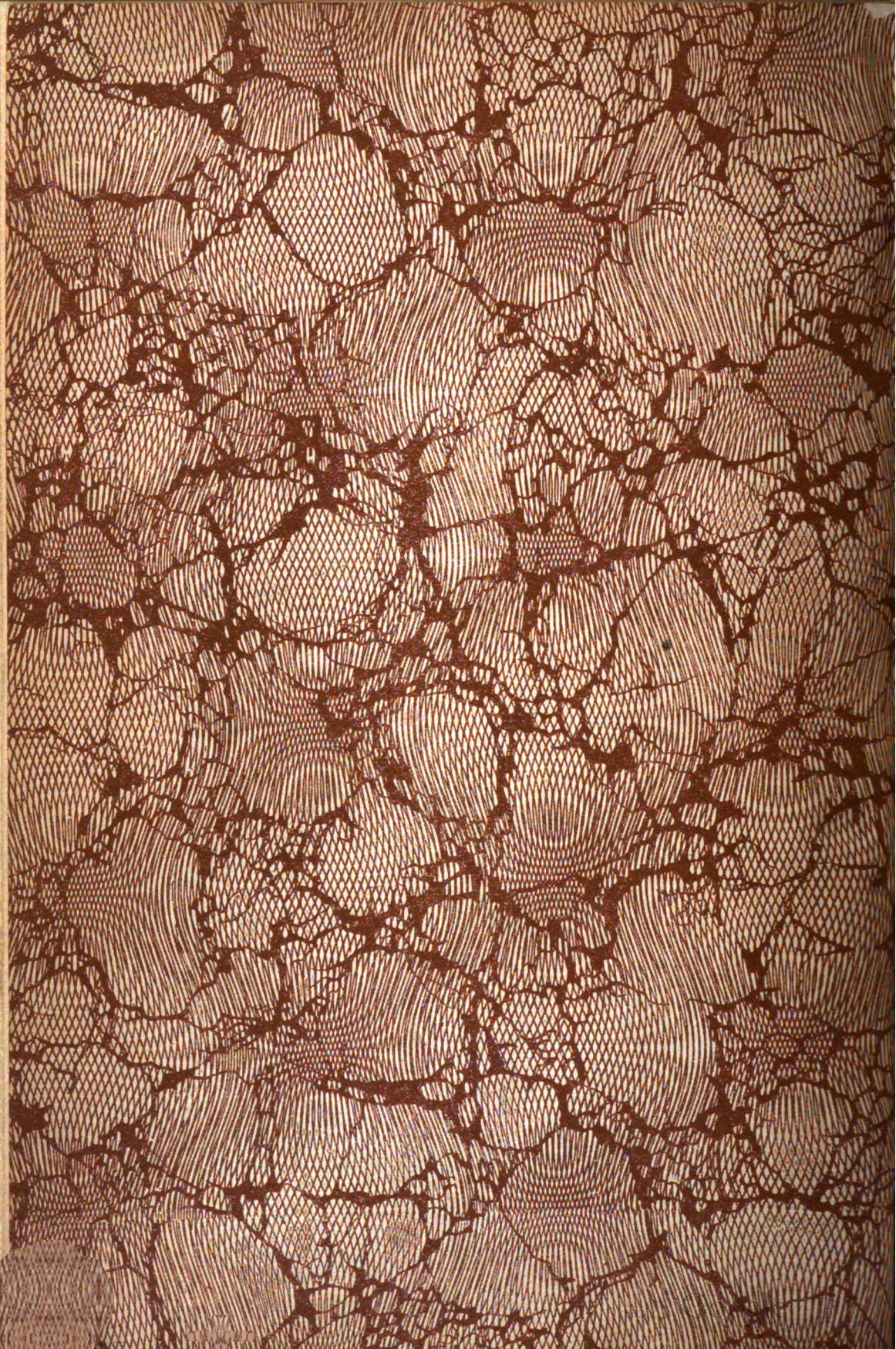
Zeuthen 58, 83, 88, 131,
Zimmermann 94, 95, 141.
Ziwet 80.
Zolt (de) 10.
Zurria 23.

ERRATA

A pag. 92, linea quart' ultima del testo: invece di « Taylor e Machrurin » si legga: « Taylor e Maclaurin, e di tre teoremi relativi alla continuità, integrabilità, derivabilità delle serie a termini variabili ».

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

BIBLIOTECA